

# SYNTHÈSE MULTIMODÈLE D'UN RÉGULATEUR POLYNOMIAL ROBUSTE

THÈSE N° 1747 (1997)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Yves PIGUET**

Ingénieur en microtechnique diplômé EPF  
originaire du Chenit (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. R. Longchamp, directeur de thèse  
Prof. H. Bleuler, corapporteur  
Dr U. Holmberg, corapporteur  
Dr E. Irving, corapporteur  
Dr H.F. Raynaud, corapporteur

Lausanne, EPFL  
1997



# Remerciements

Le travail de thèse présenté dans cet ouvrage n'aurait pu se faire sans l'aide et le soutien d'un grand nombre de personnes.

Je remercie le Professeur R. Longchamp, tout d'abord pour son enseignement qui m'a marqué suffisamment pendant mes études pour que je désire revenir à l'automatique, puis pour son accueil et son soutien à l'Institut d'automatique. Sandra Brella-Macris et Olivier Ramambason, mes assistants pendant mes travaux de semestre et de diplôme, ont également droit à toute ma gratitude.

Le Dr Ulf Holmberg n'a jamais ménagé ses conseils, son écoute attentive et ses suggestions. Qu'il en soit remercié.

Je remercie aussi les Drs Irving et Raynaud et le Professeur Bleuler d'avoir accepté la tâche de corapporteurs. Leur analyse de mon travail, leurs remarques, leurs critiques ont été très appréciées.

Ce rapport ne serait pas ce qu'il est sans la relecture attentive de mon père, d'Ulf et du Prof. Longchamp. Ici, c'est au lecteur que je m'associe pour les en remercier.

L'Institut d'automatique est un endroit où il fait bon travailler et discuter. Je remercie les Professeurs Roland Longchamp et Dominique Bonvin, Marie-Claire Corminboeuf et tous mes collègues pour leur aide, les discussions fructueuses que nous avons échangées et leur amitié.

Le travail de thèse est une tâche de longue haleine, avec des moments exaltants et d'autres plus difficiles. Que Pierre Flury, Francesco Mondada et Laurent Rey, qui m'ont précédé dans cette voie, soient remerciés pour leurs encouragements et leurs conseils.

Je tiens également à remercier le Laboratoire d'Automatique de Grenoble, à l'ENSIEG, dont le bras souple a permis de valider les idées présentées dans cette thèse. Je veux citer en particulier le Professeur I. D. Landau, qui

a proposé plusieurs benchmarks et permis de comparer différentes approches de synthèse de régulateurs robustes, et J.-M. Devesne, qui a essayé les régulateurs sur l'installation et m'a permis ainsi de compléter ce travail par des résultats expérimentaux. La formulation même du benchmark a influencé ma compréhension de l'automatique robuste.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à mes parents, à mon frère Jean-Christophe, à ma belle-soeur Isabelle et à mes neveux Adrien et Léonard pour leur soutien pendant ces quatre dernières années (ou moins !) et leur affection.

# Résumé

Deux nouvelles approches de synthèse multimodèle d'un régulateur polynomial à deux degrés de liberté sont proposées : le placement de pôles multimodèle et l'optimisation multiobjective. La prise en compte de plusieurs modèles permet de tenir compte de variations paramétriques du système à commander sans introduire de conservatisme, que celles-ci soient dues à des erreurs de modélisation ou à des changements des conditions de fonctionnement. Le régulateur qui en résulte est robuste à la fois en stabilité et en performances.

Le placement de pôles multimodèle consiste à spécifier la position des pôles en boucle fermée correspondant à l'ensemble des modèles. On montre que seul un placement approximatif est possible. La distance entre les pôles désirés et les pôles effectifs est pondérée afin de pénaliser davantage les erreurs associées aux pôles déterminants pour la stabilité et les performances, et minimisée avec la méthode des moindres carrés. Une approche itérative est proposée pour améliorer les performances, et un programme de conception interactive est développé pour permettre à l'utilisateur de déterminer facilement quels compromis entre performances et robustesse sont possibles.

Dans l'optimisation multiobjective, basée elle aussi sur plusieurs modèles, on considère un ensemble de mesures de performances que l'on veut approcher le plus possible de valeurs cibles. Il en résulte un problème de type minimax. La prise en compte de la norme  $H_\infty$  de la sensibilité assure la robustesse en stabilité. Des objectifs très variés peuvent être inclus, tels que des bornes sur les réponses harmoniques et temporelles. Le résultat est un compromis entre toutes les spécifications, ce qui est souvent l'objectif visé. Suivant la méthode d'optimisation utilisée, des minima locaux risquent d'empêcher d'atteindre l'optimum global ; cependant, cette méthode peut améliorer substantiellement une solution existante.

Les deux approches sont appliquées à la synthèse d'un régulateur pour un

bras souple. Ce système présente des modes mal amortis et de grandes variations paramétriques. Le cahier des charges inclut des spécifications de stabilité et de performances robustes. Le placement de pôles multimodèle est utilisé pour obtenir un régulateur qui satisfait toutes les exigences. L'optimisation multiobjective permet ensuite d'améliorer les performances dans leur ensemble, puis plus spécifiquement de réduire l'effort au niveau du signal de commande.

# Abstract

Two new approaches are proposed for the multimodel synthesis of a two-degrees-of-freedom polynomial controller : the multimodel pole placement and the multiobjective optimisation. Using several models enables taking into account the parametric variations of the controlled system without introducing conservativeness, be they due to modelling mismatch or changes in the operating conditions. The resulting controller is robust with respect to stability and performances.

Multimodel pole placement consists in specifying the closed-loop pole position corresponding to the whole set of models. It is shown that only an approximate pole placement is possible. The distances between the desired and the actual poles are weighted to penalize more the error on the poles which have the most effect on the stability and the performances, and minimized with the least-squares method. An iterative approach is proposed for improving the performances, and an interactive computer-aided design program is developed that enables the user finding easily which compromises are possible between performances and robustness.

In multiobjective optimisation, one considers a set of performance criteria which should be made as close as possible to goal values, also for several models. This results in a minimax problem. Taking into account the  $H_\infty$  norm of the sensitivity guarantees robust stability. Many different objectives can be included, such as limits on the time- and frequency-domain responses. The result is a compromise between all the specifications, which is often the purpose of the design. Depending on the optimisation method used, local minima may prevent from reaching the global optimum ; however, this method can significantly improve an existing solution.

Both approaches are applied to the design of a controller for a flexible arm. This system exhibits poorly damped modes and large parametric variations.

The specifications concern robust stability and performances. Multimodel pole placement is used to obtain a controller which satisfies all of them. Then multi-objective optimisation enables improving the whole set of performance criteria, or more specifically reducing the amplitude of the control signal.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Idées maîtresses du travail . . . . .	1
1.2 Description générale . . . . .	1
1.3 Définitions . . . . .	3
1.4 Etat de l'art . . . . .	5
1.4.1 Commande robuste et multimodèle . . . . .	5
1.4.2 Conception assistée par ordinateur . . . . .	8
1.5 Régulateur RST . . . . .	9
1.5.1 Modèle du système . . . . .	9
1.5.2 Structure du régulateur . . . . .	10
1.5.3 Placement des pôles . . . . .	12
1.5.4 Filtrage de la consigne . . . . .	15
1.5.5 Fonctions de sensibilité . . . . .	16
1.5.6 Conclusions . . . . .	17
<b>2 Placement de pôles multimodèle</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Placement de pôles multimodèle exact . . . . .	21
2.3 Compromis entre plusieurs modèles . . . . .	23
2.4 Pondération . . . . .	24
2.5 Sensibilité régulateur-pôles . . . . .	26

2.6	Algorithme de synthèse . . . . .	31
2.7	Conclusions . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Optimisation multiobjective</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Optimisation multiobjective . . . . .	34
3.3	Paramétrisation du régulateur . . . . .	40
3.4	Fonctions de sensibilité . . . . .	42
3.5	Réponses temporelles . . . . .	43
3.6	Optimisation simultanée . . . . .	46
3.7	Optimisation séparée du préfiltre . . . . .	46
3.8	Conclusions . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Conception assistée par ordinateur</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Structure du programme . . . . .	50
4.3	Fonctions de transfert . . . . .	53
4.4	Zéros et pôles . . . . .	54
4.5	Réponses temporelles . . . . .	55
4.6	Réponses harmoniques . . . . .	56
4.7	Placement de pôles multimodèle . . . . .	59
4.8	Critères de performances . . . . .	62
4.9	Entrées-sorties . . . . .	62
4.10	Conclusions . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>65</b>
5.1	Introduction . . . . .	65
5.2	Description du système . . . . .	66
5.3	Spécifications . . . . .	69
5.3.1	Structure du régulateur . . . . .	69
5.3.2	Stabilité et performances robustes en régulation . . . . .	71
5.3.3	Performances robustes en asservissement . . . . .	71
5.3.4	Remarques . . . . .	71
5.4	Placement de pôles multimodèle . . . . .	72
5.4.1	Régulateur initial . . . . .	72
5.4.2	Synthèse interactive de la contre-réaction . . . . .	74
5.4.3	Optimisation du préfiltre . . . . .	76
5.4.4	Résultats . . . . .	77
5.5	Optimisation multiobjective . . . . .	87

5.5.1 Synthèse du régulateur . . . . .	87
5.5.2 Résultats . . . . .	89
5.6 Comparaison avec d'autres méthodes . . . . .	96
5.7 Conclusions . . . . .	97
<b>6 Conclusions générales</b>	<b>99</b>
6.1 Contributions . . . . .	99
6.2 Extensions possibles . . . . .	100
<b>Notations</b>	<b>103</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>
<b>Index</b>	<b>113</b>
<b>Curriculum vitae</b>	<b>117</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Idées maîtresses du travail

Le but de ce travail est double. Pour un système monovariante, linéaire et invariant, nous voulons montrer les points suivants :

- La représentation d'un système soumis à des variations paramétriques est faite avantageusement par un ensemble fini de modèles. Des méthodes de synthèse qui exploitent directement ce formalisme évitent le conservatisme lié aux incertitudes non structurées et à celles bornées par des volumes convexes. De plus, la prise en compte des spécifications telles qu'elles sont fournies par le cahier des charges autorise des performances élevées.
- L'utilisation d'outils de conception assistée par ordinateur véritablement interactifs, avec lesquels l'utilisateur voit instantanément l'effet de ses choix sur les réponses harmoniques et temporelles, facilite la synthèse de régulateurs performants, même pour des systèmes réputés difficiles à commander.

### 1.2 Description générale

La suite du chapitre commence par définir les termes essentiels utilisés dans ce travail, à commencer par son titre. La section 1.4 situe le travail par rapport aux

tendances actuelles de la commande robuste et en justifie l'intérêt. Pour finir, le modèle du système, le régulateur à deux degrés de liberté et le placement de pôles standard sont présentés dans la section 1.5 ; ils permettent d'introduire les notions de base sur lesquelles reposent les chapitres suivants.

Le chapitre 2 est consacré à la synthèse multimodèle de la contre-réaction par placement de pôles. Un placement approximatif qui résulte d'un compromis entre les modèles est proposé. Il est justifié par l'impossibilité de spécifier arbitrairement les pôles de tous les modèles. Une approche itérative est décrite, au cours de laquelle la robustesse et les performances sont améliorées par le déplacement des pôles en boucle fermée. L'utilisation de poids est introduite pour pénaliser l'erreur sur les pôles dominants quant à leur effet sur les performances, et leur importance est montrée par des exemples.

Le chapitre 3 décrit une procédure d'optimisation qui vise à améliorer les performances selon des critères très divers. Tous les critères sont améliorés simultanément par une procédure de type minimax, ce qui permet d'aboutir à un compromis équilibré. L'optimisation touche à la fois les paramètres de la contre-réaction et du filtre de consigne. Dans le cas où l'on ne désire pas modifier la contre-réaction, une méthode simplifiée est proposée pour satisfaire les spécifications sur l'asservissement.

Dans le chapitre 4, le programme de conception assistée par ordinateur que nous avons écrit pour exploiter le placement de pôles multimodèle de façon interactive est présenté. Ses apports vis-à-vis de programmes existants sont exposés. En plus de son utilité pour la synthèse multimodèle, un exemple montre son intérêt dans le cadre de l'automatique classique.

Le chapitre 5 montre l'efficacité des méthodes proposées pour la commande d'un système oscillant à larges variations paramétriques et soumis à un cahier des charges contraignant, en l'occurrence un bras souple. Quatre régulateurs sont proposés. Les deux premiers sont obtenus par placement de pôles multimodèle et optimisation du préfiltre. Des simulations et des résultats expérimentaux sont présentés et discutés. Ensuite, pour améliorer les performances, le second régulateur est modifié par optimisation multiobjective. Les résultats permettent de comparer les deux méthodes entre elles et avec d'autres régulateurs proposés pour le même système.

Pour finir, le chapitre 6 fournit des conclusions sur l'apport de ce travail à la commande robuste et donne quelques pistes pour des extensions possibles.

## 1.3 Définitions

Par *commande*, nous entendrons les techniques qui permettent d'élaborer un ou plusieurs signaux de commande en fonction de consigne(s) et de mesure(s). On rencontre deux types de problèmes : la *régulation*, qui consiste à rendre la ou les sorties du système insensibles par rapport à des perturbations ou à une modélisation imparfaite, et l'*asservissement*, où la sortie doit suivre la consigne. Nous appellerons *synthèse* les algorithmes qui permettent d'obtenir des valeurs numériques pour les paramètres du régulateur, même si une part d'intervention humaine est nécessaire, par exemple pour modifier une spécification ; certains automaticiens réservent ce terme pour un calcul purement mécanique [RM78].

Les deux buts essentiels que doit remplir un régulateur sont d'assurer la stabilité et un certain niveau de performances, évaluées selon des critères tels que temps de montée, intégrale de la valeur absolue de l'erreur après une perturbation ou amplification à certaines fréquences [YL96]. Ils sont le plus souvent contradictoires : la stabilité est d'autant plus facile à garantir que le régulateur impose une dynamique lente.

La synthèse est le plus souvent basée sur un modèle du système. Le modèle ne représente qu'imparfaitement le système, pour les raisons suivantes :

- la structure du modèle est toujours une simplification de la réalité ;
- les paramètres du modèle sont entachés d'erreurs de mesure ou d'estimation ;
- les paramètres peuvent varier au cours du temps ;
- si le modèle est la représentation linéarisée d'un système non linéaire, le changement des conditions de fonctionnement modifie la valeur des paramètres.

Le régulateur est *robuste* s'il garantit le niveau de performances spécifié même lorsque le système s'écarte du modèle. On parle de *commande robuste* si les incertitudes sont explicitement prises en compte ; c'est en cela qu'elle se distingue de l'automatique classique, qui assure elle aussi une certaine robustesse évaluée typiquement par les marges de gain et de phase. La robustesse peut porter aussi bien sur la stabilité que sur les performances.

Dans ce travail, on considérera uniquement des systèmes *linéaires, invariants, au repos, SISO (Single-Input Single-Output, à une entrée et une sortie), et discrets*. Ni la numérisation des signaux, ni celle des paramètres du régulateur

n'est prise en compte. Les modèles et les régulateurs sont représentés par des *fonctions de transfert en  $z$* . Les régulateurs étudiés sont à *deux degrés de liberté*.

- **Linéarité et invariance** La linéarité rend l'analyse des systèmes beaucoup plus facile. On peut considérer séparément l'effet des différentes entrées, telles que la consigne et les perturbations, et appliquer le principe de superposition. La linéarité et l'invariance permettent la représentation des systèmes par des fonctions de transfert qui facilitent leur combinaison et le calcul de leur réponse harmonique.
- **SISO** La restriction du nombre d'entrées et de sorties simplifie considérablement les calculs et évite le recours à une représentation par modèle d'état. De nombreux systèmes multivariables peuvent être réduits à un ensemble de systèmes SISO, en considérant des sous-systèmes découplés naturellement [Owe87], en découplant l'effet des entrées sur les sorties [May73, Mun87], ou par des boucles de contre-réaction en cascade [OR94].
- **Discrétisation** Les régulateurs modernes sont pratiquement toujours implantés sur des microprocesseurs qui travaillent sur des suites de nombres. L'avantage des microprocesseurs est de permettre de changer les coefficients du régulateur, ou même sa structure, beaucoup plus rapidement qu'avec de l'électronique analogique câblée ou des solutions mécaniques, hydrauliques ou pneumatiques. De plus, une solution purement informatique facilite la supervision et la télémaintenance.

Certaines méthodes de synthèse sont mieux adaptées aux processus et aux régulateurs continus. L'implantation sur un microprocesseur requiert alors la numérisation du régulateur, qui peut introduire des problèmes dus aux déformations des réponses harmoniques près de la fréquence de Nyquist [SSH96]. Quand elle est possible, la prise en compte de l'échantillonnage durant la synthèse est préférable, surtout lorsque les marges de robustesse sont faibles.

- **Signaux réels** Les effets de la quantification, qui rend le système non linéaire, ne sont pas étudiés dans ce travail. Nous veillerons à ne pas exiger une précision exagérée pour les coefficients des régulateurs que nous obtiendrons [KB97]. Les simulations sont faites avec des nombres à virgule flottante dont la mantisse est codée sur 53 bits.



- **Fonctions de transfert en  $z$**  La restriction à des systèmes SISO, linéaires, invariants, au repos et échantillonnés rend possible l'utilisation de fonctions de transfert en  $z$ , plus simples à manipuler que la représentation par modèles d'état. Les fonctions de transfert seront généralement écrites sous forme de fonctions rationnelles de polynômes en l'opérateur d'avance  $q$ . On peut ainsi aisément écrire la réponse d'un signal filtré par une fonction de transfert, sans définir la transformée en  $z$  des signaux. L'opérateur d'avance  $q$  est à notre avis plus naturel que l'opérateur de retard  $q^{-1}$ ; en effet, les pôles et les zéros d'une fonction de transfert se définissent toujours par rapport à  $q$  (ou à  $z$ ). La transformée en  $\delta$  a l'avantage de conduire à une représentation mieux conditionnée numériquement [MG90], mais elle est peu répandue. Une fois la synthèse faite dans le domaine de la transformée en  $z$ , il est toujours possible, si des problèmes numériques se posent, de passer à une équation aux différences en  $\delta$  pour l'implantation du régulateur.
- **Régulateur à deux degrés de liberté** On distingue les régulateurs qui basent le calcul de la commande exclusivement sur l'écart entre la sortie et la consigne de ceux qui filtrent différemment ces deux signaux. Ces derniers sont dits à deux degrés de liberté. Ils offrent la possibilité de spécifier indépendamment les performances en régulation (qui est basée sur la contre-réaction et doit tenir compte des contraintes de stabilité) et en asservissement.

## 1.4 Etat de l'art

### 1.4.1 Commande robuste et multimodèle

Pour mieux situer notre approche de synthèse multimodèle, il est judicieux de résumer les grandes tendances de la commande robuste.

L'importance de la robustesse n'a pas échappé aux pères de l'automatique. En 1927, Harold S. Black imagina l'utilisation d'une contre-réaction de gain important pour réduire la sensibilité aux perturbations. En 1932, H. Nyquist présenta le critère de stabilité qui porte son nom. H. W. Bode reprit ces résultats pour proposer en 1945 une méthode de synthèse basée sur les propriétés harmoniques de la fonction de transfert en boucle ouverte. Ces travaux sont à la base de ce que l'on appelle l'*automatique classique*. La *Quantitative Feedback Theory*, ou QFT, est une mise en oeuvre plus évoluée de ces principes, dans

laquelle les spécifications aussi bien que les incertitudes sont évaluées dans le domaine harmonique [Hor91b]. La *Commande Robuste d'Ordre Non Entier* (CRONE) utilise une dérivation d'ordre fractionnaire (qui est ensuite approchée par un ensemble de pôles et de zéros) pour obtenir une variation de phase telle que les incertitudes paramétriques du système affectent aussi faiblement que possible la réponse harmonique en boucle ouverte [OLM95].

L'*automatique moderne*, basée sur une représentation par modèle d'état, négligea longtemps les incertitudes sur le système, qui sont pourtant la principale raison d'être de la contre-réaction [Hor91a]. Ce défaut conduisit à des régulateurs peu robustes. La *commande adaptative*, qui a pour but de remplacer ce manque de robustesse par une identification en ligne du système pour pouvoir modifier les paramètres du régulateur et conserver les propriétés dynamiques souhaitées, devait y remédier ; mais son caractère intrinsèquement non linéaire en rend l'analyse délicate et les garanties de stabilité difficiles à obtenir [ÅW90, Lon95].

Depuis les années quatre-vingt, la commande robuste s'attache à exploiter la connaissance des incertitudes pour garantir la stabilité et les performances du système commandé. La synthèse  $H_\infty$  se base sur des incertitudes non structurées pour minimiser le module de l'amplitude de diverses fonctions de transfert [DFT92]. Elle permet notamment de garantir la stabilité robuste et de maximiser les performances, et, en ce sens, est une forme d'optimisation multiobjective.

En 1978, Kharitonov donna une condition nécessaire et suffisante simple pour tester la stabilité robuste d'un polynôme dont les coefficients varient dans des plages connues [Bar94]. Le principe d'exclusion des zéros (*Zero Exclusion Principle*), basé sur la continuité des zéros d'un polynôme par rapport aux variations de ses coefficients, donne lieu à des méthodes d'analyse de la robustesse pour différents types d'incertitudes paramétriques. Lorsque celles-ci sont bornées par un ellipsoïde, on peut calculer facilement un rayon de robustesse, égal au facteur maximal par lequel l'ellipsoïde peut être multiplié tout en assurant la stabilité robuste. Il existe diverses méthodes de synthèse qui maximisent le rayon de robustesse. [RB91] propose de maximiser une borne inférieure donnée par une norme  $H_\infty$ , et [HPB95] l'approximation d'une borne inférieure moins conservatrice. Une optimisation dans l'espace des coefficients du régulateur est décrite dans [Per94].

Pour éviter le conservatisme causé par une surestimation des incertitudes, on s'est intéressé à des approches multimodèles. La *stabilisation simultanée* consiste à déterminer le régulateur qui stabilise un ensemble fini de fonctions de transfert. Même s'il existe des résultats prometteurs sur l'existence de tels

régulateurs, le problème de la synthèse n'est résolu que pour deux modèles [DFM92]. La stabilisation robuste des systèmes intermédiaires, donnés par  $G(s, \lambda) = (\lambda B_1(s) + (1 - \lambda)B_2(s))/(\lambda A_1(s) + (1 - \lambda)A_2(s))$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , est résolue notamment dans [ADPD95]. Une approche plus interactive est proposée par [ABK<sup>+</sup>94] ; pour chaque modèle, on détermine la région dans l'espace des paramètres qui correspond à la région désirée pour les pôles en boucle fermée dans le plan complexe. Le régulateur est choisi dans l'intersection de ces régions, si elle existe. Pratiquement, pour permettre une représentation graphique, on se restreint à leur intersection avec un hyperplan dans l'espace des paramètres du régulateur. Le choix des hyperplans, de même que celui de la région admise pour les pôles, peut rendre la synthèse difficile.

D'autres méthodes s'attachent à utiliser plusieurs modèles dans des procédures d'optimisation. [PT94] propose une optimisation mixte  $H_2/H_\infty$  multimodèle avec descente de gradient. L'utilité de cette approche a été montrée notamment dans l'aéronautique [GBBL86, Miy90] et l'industrie chimique [STsW91, TT90].

L'idée du placement de pôles multimodèle a déjà été exploitée par [LvdW94], qui calcule le régulateur par placement de pôles multimodèle et utilise la méthode des moindres carrés en minimisant l'erreur au niveau des coefficients du régulateur. Cela présente un grave inconvénient : les performances sont très sensibles aux variations des coefficients. La synthèse d'un bon régulateur est le résultat d'un compromis. Ici, les seuls paramètres de synthèse sont les pôles désirés des différents modèles en boucle fermée et un éventuel poids différent pour chaque modèle. Mais comme les coefficients des polynômes sont une représentation mal conditionnée des pôles, une faible variation risque de donner des résultats très différents de ceux attendus.

L'optimisation multiobjective consiste à améliorer simultanément plusieurs mesures de performances. Introduite dans le domaine économique par Vilfredo Pareto<sup>1</sup> en 1896, elle est reprise dans le contexte de l'automatique par L. A. Zadeh [Zad63]. Elle découle de l'observation qu'il est impossible d'établir un classement de toutes les solutions en fonctions de plusieurs critères ; certaines solutions peuvent être meilleures que d'autres selon un certain critère et moins bonnes selon un autre critère. Une solution est dite *Pareto-optimale* si aucune autre solution n'est meilleure selon au moins un critère et équivalente selon les autres. De nombreuses méthodes de synthèse de régulateur peuvent être basées sur ce principe. [Dor91] parle de *conception multiobjective robuste* lorsqu'au moins un des critères concerne la stabilité robuste. Zadeh

---

<sup>1</sup>Economiste et sociologue italien, 1848–1923

propose de considérer l'ensemble des régulateurs Pareto-optimaux avant de choisir celui qui réalise le compromis le plus acceptable ; mais cela pose des problèmes insolubles lorsqu'ils sont nombreux ou difficiles à obtenir. Une approche plus réaliste consiste à remplacer l'optimisation multiobjective par un objectif scalaire unique. La difficulté consiste à ne pas retomber sur le défaut essentiel de l'optimisation d'une valeur scalaire, à savoir le manque de contrôle sur le compromis obtenu. La minimisation d'une somme pondérée des objectifs est à éviter pour cette raison. On peut ne retenir que l'un des objectifs et considérer tous les autres comme des contraintes, par exemple en minimisant la norme  $H_\infty$  pondérée de la sensibilité complémentaire pour obtenir des performances maximales avec une contrainte sur celle de la sensibilité pour assurer la stabilité robuste [CS88]. Enfin, il convient de noter qu'au-delà des capacités des méthodes de synthèse d'obtenir de bons régulateurs, les performances sont plafonnées par des limites théoriques [SBG97].

## 1.4.2 Conception assistée par ordinateur

Les systèmes de conception assistée par ordinateur (CAO) pour l'automatique sont souvent basés sur un langage de commande spécialisé pour la manipulation des objets mathématiques propres à la commande (polynômes, matrices, suites temporelles et harmoniques, etc.), avec des extensions pour générer des graphiques. Leur avantage principal est une grande souplesse d'utilisation [RJ96] ; de nouvelles approches peuvent être essayées facilement et rapidement, et de nombreuses boîtes à outils, sous forme de collections de définitions de nouvelles commandes, couvrent un large domaine de l'automatique. Le plus répandu des logiciels de ce type est sans doute Matlab [Mat97].

Parallèlement à ces systèmes, dont l'utilité est évidente, existe le besoin de programmes davantage ciblés. Le désir d'une plus grande interactivité a donné lieu à des outils souvent programmés avec Matlab ; par exemple la toolbox QFT [YCB97], qui permet à l'utilisateur de spécifier facilement des gabarits dans le diagramme de Black, et PARADISE [SAB97], basé sur la méthode d'Ackermann [ABK<sup>+</sup>94]. Les logiciels qui permettent la manipulation directe du régulateur et l'affichage des performances en temps réel semblent encore peu répandus.

## 1.5 Régulateur RST

La fin de ce chapitre est consacrée à la description de la synthèse d'un régulateur à deux degrés de liberté de type RST. Elle permet entre autres d'introduire les notations utilisées dans la suite de ce travail.

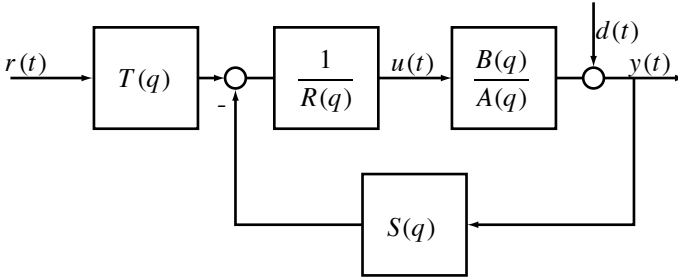
### 1.5.1 Modèle du système

Le processus est un système à une entrée  $u(t)$ , appelée *signal de commande* ou simplement *commande*, et une sortie  $y(t)$ . Il est modélisé par une fonction de transfert  $H(q) = B(q)/A(q)$  strictement propre entre la commande et la sortie. Le caractère strictement propre ( $\deg A > \deg B$ ) assure un retard d'au moins une période d'échantillonnage entre la commande et la sortie, ce qui sera nécessaire pour permettre la synthèse du régulateur. Ce n'est pas une limitation gênante, car tout système physique possède un retard strictement positif qui, vu à travers les échantillonneurs, devient supérieur ou égal à une période d'échantillonnage. Les polynômes  $A(q)$  et  $B(q)$  sont choisis premiers entre eux. A la sortie du système s'ajoute une *perturbation*  $d(t)$  non mesurable directement. La sortie complète est donc

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + d(t) \quad (1.1)$$

Le modèle peut être obtenu de différentes façons [Lju87]. On peut soit partir du modèle physique du processus, établir les équations différentielles, remplacer les constantes physiques par leurs valeurs mesurées, linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement et passer dans le domaine de la transformée en  $z$  (*modèle de connaissance*); soit fixer l'ordre du modèle et identifier ses paramètres en procédant à une série d'expérimentations (*modèle de représentation*); soit utiliser un mélange des deux méthodes. Une partie importante de la modélisation consiste à évaluer la validité du modèle, soit par une quantification des incertitudes, soit par une dépendance par rapport à certaines variations paramétriques. Les méthodes particulières pour modéliser le processus dépassent le cadre de ce travail.

Dans ce chapitre, nous nous baserons sur un modèle unique, appelé *modèle nominal*. Les chapitres suivants sont dévolus à la commande robuste et par conséquent prennent en compte explicitement les imperfections du modèle.



**Figure 1.1** Système échantillonné et régulateur RST.

## 1.5.2 Structure du régulateur

Dans ce travail, on considère un régulateur polynomial à deux degrés de liberté de la forme suivante (cf. fig. 1.1) :

$$R(q)u(t) = -S(q)y(t) + T(q)r(t) \quad (1.2)$$

Les degrés de liberté se réfèrent à la prise en compte différenciée de la sortie et de la consigne pour l'élaboration du signal de commande. Dans un régulateur à un degré de liberté, la commande se base sur le signal d'erreur  $e(t) = r(t) - y(t)$ , ce qui force à choisir un compromis entre la stabilité et le rejet des perturbations d'une part, et l'asservissement à une grandeur de consigne d'autre part.

Sans perte de généralité, on suppose  $R(q)$  monique. Pour faciliter la synthèse, on factorise les polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  en une partie fixée a priori (respectivement  $R_f$ ,  $S_f$  et  $T_f$ ) et une partie que l'on désire synthétiser en se basant sur des spécifications de stabilité et de performances en boucle fermée ( $R'$ ,  $S'$  et  $T'$ ). Les parties fixes permettent de garantir le rejet de certaines classes de perturbations ou d'éviter d'exciter le signal de commande à certaines fréquences ; par exemple, un facteur  $(q - 1)$  dans  $R_f$  impose un intégrateur dans le régulateur, qui a la propriété bien connue [Lon95] d'éliminer le statisme dû à une perturbation constante même si le système n'a pas d'effet intégrateur. On a ainsi

$$R(q) = R_f(q)R'(q) \quad (1.3)$$

$$S(q) = S_f(q)S'(q) \quad (1.4)$$

$$T(q) = T_f(q)T'(q) \quad (1.5)$$

avec  $R_f(q)$  et  $S_f(q)$  moniques et  $T_f(1) = 1$  (sans perte de généralité puisque  $R'(q)$  est monique et que les gains statiques de  $S'(q)$  et  $T'(q)$  ne sont pas spécifiés). On définit aussi

$$A'(q) = A(q)R_f(q) \quad (1.6)$$

$$B'(q) = B(q)S_f(q) \quad (1.7)$$

La façon de déterminer *au mieux* (nous verrons dans les prochains chapitres ce qu'il faut entendre par là) la valeur des coefficients de  $R'$ ,  $S'$  et  $T'$  sera le but essentiel de notre travail. Avec le système et les parties fixes du régulateur, les coefficients de  $R'$  et  $S'$  déterminent les propriétés de la régulation (c'est-à-dire de stabilisation, de rejet des perturbations et de désensibilisation par rapport aux incertitudes du modèle). Le polynôme  $T'$  n'a d'effet que sur l'asservissement à une grandeur de consigne, qui est également influencé par  $R'$  et  $S'$ . Les paramètres de la partie contre-réaction, c'est-à-dire les coefficients de  $R'$  (sans  $r'_0 = 1$ ) et  $S'$ , sont réunis dans le vecteur-colonne  $x$  :

$$x = \left[ r'_1 \cdots r'_{\deg R'} s'_0 \cdots s'_{\deg S'} \right]^T \quad (1.8)$$

Pour que le régulateur soit causal, les conditions suivantes doivent être remplies :

$$\begin{aligned} \deg R &\geq \deg S \\ \deg R &\geq \deg T \end{aligned} \quad (1.9)$$

En boucle fermée, la fonction de transfert  $H_c(q)$  entre la consigne et la sortie est

$$H_c(q) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \quad (1.10)$$

et la fonction de transfert  $H_p(q)$  entre la perturbation  $d(t)$  et la sortie  $y(t)$

$$H_p(q) = \frac{A(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \quad (1.11)$$

La sortie vaut alors

$$y(t) = H_c(q)r(t) + H_p(q)d(t) \quad (1.12)$$

### Et la simplification zéros-pôles ?

Une façon répandue [Lon95] de fixer les polynômes d'un régulateur RST consiste à imposer l'égalité  $BT/(AR + BS) = B_m/A_m$ , où  $B_m/A_m$  est la fonction de transfert désirée en asservissement. On peut dès lors introduire deux simplifications entre les zéros des différents polynômes. En imposant un facteur commun  $A_0$  entre  $AR + BS$  et  $T$  (couramment appelé *polynôme observateur* par analogie avec la commande d'état), on fait disparaître une partie de la dynamique interne de la fonction de transfert en asservissement, qui reste présente en régulation. En imposant un facteur commun  $B^+$  entre  $B$  et  $R$ , on obtient un effet similaire. Dans le cadre de ce travail, aucune de ces simplifications n'est envisagée. Elles ne sont en effet valables que lorsque le système est exactement identique au modèle, hypothèse difficilement justifiable en commande robuste. D'autre part, nous nous intéressons explicitement au comportement en régulation et nous voulons prendre en compte le signal de commande.

Le dénominateur  $C(q)$  de  $H_c(q)$  et de  $H_p(q)$ , identique, est le *polynôme caractéristique*, dont les zéros sont les *pôles en boucle fermée* :

$$C(q,x) = A(q)R_f(q)R'(q) + B(q)S_f(q)S'(q) \quad (1.13)$$

Le polynôme caractéristique détermine la stabilité du système en boucle fermée et contribue largement à ses propriétés dynamiques. Celles-ci dépendent également des zéros des fonctions de transfert entre différents types de perturbations et la commande ou la sortie, mais on ne peut pas les spécifier indépendamment du polynôme caractéristique (voir aussi l'encadré ci-dessus).

### 1.5.3 Placement des pôles

Une façon de fixer la valeur des polynômes  $R'(q)$  et  $S'(q)$  est d'imposer un certain polynôme caractéristique  $C^D(q)^2$ . On obtient ainsi l'équation diophantaine<sup>3</sup> suivante :

$$A(q)R_f(q)R'(q) + B(q)S_f(q)S'(q) = C^D(q) \quad (1.14)$$

<sup>2</sup>Nous distinguons  $C(q,x)$  de  $C^D(q)$  non pas par pédantisme, mais parce que par la suite, nous utiliserons la dérivée  $\partial C/\partial x$ . Comme  $C^D(q)$  ne dépend pas de  $x$ , sa dérivée est évidemment nulle.

<sup>3</sup>Du nom du mathématicien Diophante (IIIe siècle).



Les inconnues sont les coefficients des polynômes  $R'(q)$  et  $S'(q)$ . Le théorème suivant donne les conditions d'existence d'une solution.

**Théorème 1.1** *Soient les polynômes fixés  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C^D(q)$ , et deux polynômes inconnus  $X(q)$  et  $Y(q)$ . L'équation diophantienne  $A(q)X(q) + B(q)Y(q) = C^D(q)$  admet au moins une solution si et seulement si le plus grand commun diviseur de  $A(q)$  et  $B(q)$  est un facteur de  $C^D(q)$ .*

**Démonstration** Voir [ÅW90]. ■

Parmi l'infinité de solutions, le théorème suivant en donne une qui correspond à un régulateur causal :

**Théorème 1.2** *Soient le polynôme caractéristique (1.13), avec  $\deg A > \deg B$ , et le polynôme caractéristique désiré  $C^D(q)$  de degré  $\deg C^D \geq 2 \deg A + \deg R_f + \deg S_f - 1$ . Si l'équation diophantienne (1.14) admet des solutions, l'une d'entre elles correspond à un régulateur causal avec les degrés suivants :*

$$\begin{aligned} \deg R' &= \deg C^D - \deg A - \deg R_f \\ \deg S' &\leq \deg A + \deg R_f - 1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

**Démonstration** Soit la solution  $R'_0, S'_0$ . Alors  $R' = R'_0 + QBS_f, S' = S'_0 - QAR_f$ , où  $Q$  est un polynôme arbitraire, en est aussi une. Si  $\deg S'_0 \geq \deg A + \deg R_f$ , on peut choisir  $Q$  de telle sorte que le terme de plus haut degré soit annulé, et ceci itérativement jusqu'à ce que  $\deg S' \leq \deg A + \deg R_f - 1$ . On a donc  $\deg(BS_f S') \leq \deg A + \deg B + \deg R_f + \deg S_f - 1$ ; comme  $\deg C^D \geq 2 \deg A + \deg R_f + \deg S_f - 1 > \deg A + \deg B + \deg R_f + \deg S_f - 1 \geq \deg(BS_f S')$  et  $C^D = AR_f R' + BS_f S'$ ,  $\deg(AR_f R') = \deg C^D$  et  $\deg R' = \deg C^D - \deg A - \deg R_f$ . Le retard pur du régulateur vaut  $\deg R - \deg S \geq \deg C^D - \deg A - (\deg A + \deg R_f - 1 + \deg S_f)$ , positif ou nul en raison de l'hypothèse sur  $\deg C^D$ . Le régulateur est donc causal. ■

L'inégalité sur  $\deg S'$  dans (1.15) vient de ce que pour certaines valeurs des polynômes  $AR_f, BS_f$  et  $C^D$ , des termes de  $S'$  peuvent s'annuler. Par la suite, on entendra par  $\deg S$  ou  $\deg S'$  le degré maximum que peut prendre  $S$  ou  $S'$ .

Pour éviter d'introduire un retard superflu dans la boucle de contre-réaction, ce qui a généralement pour effet de diminuer la robustesse, il est préférable de choisir  $\deg C^D$  de telle sorte que  $\deg R = \deg S$ , ou  $\deg R = \deg S + 1$  si le temps de calcul de la commande est significatif par rapport à la période d'échantillonnage; autrement dit,  $\deg S_f = \deg R - \deg S' = \deg C^D -$



**Tableau 1.1** Choix du degré de la contre-réaction pour le placement de pôles

1.	Choisir $\deg R_f$
2.	Choisir $\deg S_f$ (augmenter $\deg S_f$ si davantage de pôles en b.f. sont désirés)
3.	Choisir $d = \deg R - \deg S \geq 0$ ( $d$ = temps de calcul de la commande, typiquement 0 ou 1)
4.	Fixer $\deg R' = \deg A + \deg S_f + d - 1$
5.	Fixer $\deg S' = \deg A + \deg R_f - 1$
6.	$\deg C^D = \deg A + \deg R' + \deg R_f$

**Démonstration** Comme les pôles  $p_i^D$  sont distincts, il n'existe qu'un seul polynôme monique  $C^D(q)$  de degré  $\deg C$  qui possède  $\deg C$  zéros  $p_i^D$ . D'après le théorème 1.2, une solution existe ; elle satisfait (1.16), donc elle est unique. ■

### 1.5.4 Filtrage de la consigne

En plus de la partie contre-réaction, le régulateur à deux degrés de liberté comporte un polynôme  $T(q)$  qui filtre spécifiquement la consigne ; nous l'appellerons *préfiltre*. Par rapport aux régulateurs classiques où seule la différence entre la consigne et la sortie est prise en compte pour l'élaboration de la grandeur de commande, cela offre les avantages suivants :

- Le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée  $BT/(AR + BS)$  dépend directement de  $T$ . En fixant  $T(1) = (A(1)R(1) + B(1)S(1))/B(1)$ , on garantit l'absence de statisme vis-à-vis d'une consigne constante.
- De façon similaire, on peut imposer sans erreur permanente l'asservissement de consignes sinusoïdales de pulsation<sup>4</sup>  $\omega$  en fixant  $T(e^{j\omega}) = (A(e^{j\omega})R(e^{j\omega}) + B(e^{j\omega})S(e^{j\omega}))/B(e^{j\omega})$ .
- D'autres types de trajectoires peuvent être poursuivis sans erreur permanente [EK91, Tun92].

<sup>4</sup>Sauf mention explicite, la période d'échantillonnage  $h$  est normalisée à 1.

- Lorsque tous les pôles sont réels, des bornes sur le nombre d'extrema peuvent être déterminées en fonction de la position des zéros, ce qui permet dans certains cas de garantir l'absence de dépassement [EK91].
- Un comportement vicieux, où la réponse transitoire démarre dans le sens opposé à la consigne, peut être atténué par l'ajout de zéros supplémentaires au prix d'un retard de la sortie ou d'une anticipation de la consigne [HMPL95].
- Plus généralement, le filtre de consigne permet d'ajuster le dépassement, le dépassement négatif, le temps de montée, le temps d'établissement et les effets transitoires sur la commande.

La synthèse de  $T(q)$  pour un modèle nominal unique (régulateur non robuste) n'est pas discutée davantage dans ce travail.

### 1.5.5 Fonctions de sensibilité

Une des multiples façons d'analyser la robustesse et les performances d'un système régulé consiste à considérer l'amplitude de la réponse harmonique de différentes fonctions de transfert. On appelle couramment *fonction de sensibilité*  $\hat{S}$  la fonction de transfert entre la perturbation en sortie  $d(t)$  et la sortie  $y(t)$  :

$$\hat{S}(q) = \frac{A(q)R(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \quad (1.17)$$

On peut remarquer qu'elle est l'inverse de la distance entre le point critique -1 et la fonction de transfert en boucle ouverte  $B(q)S(q)/A(q)R(q)$ . Le point critique permet de définir différentes marges de robustesse, telles que la marge de gain et la marge de phase [Lon95]. La *marge de module* est la distance minimale entre la réponse harmonique et le point critique dans le plan complexe. Ainsi, la marge de module correspond à l'inverse de la norme  $H_\infty$  de la fonction de sensibilité. La *marge de retard* est le retard maximal que l'on peut ajouter à la boucle avant de la déstabiliser.

La *fonction de sensibilité complémentaire* est définie par

$$\hat{T}(q) = \frac{B(q)S(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} \quad (1.18)$$

Elle tire son nom du fait que  $\hat{S}(q) + \hat{T}(q) = 1$ .

L'importance des fonctions de sensibilité quant aux performances est évidente. Elles permettent de caractériser les propriétés de rejet de perturbations à certaines fréquences. En ce qui concerne la robustesse, elles garantissent la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes additives ou multiplicatives sur le système. Elles sont utilisées directement dans la synthèse  $H_\infty$  [BA94].

La position des pôles détermine la fréquence des pics de résonance des réponses harmoniques. Appelons  $p_i$  les pôles en boucle fermée ; le module de  $\hat{S}(e^{j\omega})$  peut s'écrire

$$|\hat{S}(e^{j\omega})| = \frac{|A(e^{j\omega})R(e^{j\omega})|}{\prod_i |e^{j\omega} - p_i|}$$

Le pic associé au pôle  $p_i$  est d'autant plus prononcé que  $p_i$  est proche du cercle unité, et sa pulsation dépend de  $\arg p_i$ . L'usage veut que l'on utilise plutôt la notion de *fréquence naturelle*, ou pulsation naturelle  $\omega_n$  [ABK<sup>+</sup>94], qui correspond à la pulsation du mode en l'absence d'amortissement. Au mode de résonance

$$e^{-\zeta_i \omega_n t} \cos(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta_i^2})$$

correspond la paire de pôles complexes conjugués

$$\begin{aligned} p_i &= e^{-\omega_n (\zeta_i + j\sqrt{1 - \zeta_i^2})} \\ \bar{p}_i &= e^{-\omega_n (\zeta_i - j\sqrt{1 - \zeta_i^2})} \end{aligned}$$

L'amplitude et le déphasage de l'oscillation dépendent du numérateur de la fonction de transfert considérée. La pulsation naturelle correspond d'autant moins bien au pic de résonance que l'amortissement est grand, mais est utile pour estimer le comportement harmonique asymptotique.

## 1.5.6 Conclusions

Dans cette section, nous avons passé en revue les bases nécessaires à la suite de ce travail. La structure du modèle et du régulateur ont été définies. Les spécifications que l'on cherche à satisfaire ont pour certaines d'entre elles une influence directe sur le régulateur, alors que d'autres correspondent à des propriétés du système régulé considéré dans son ensemble. Cela se reflète dans la factorisation des polynômes du régulateur en parties fixées a priori d'une part, et en parties dites libres d'autre part. C'est la synthèse de ces parties libres qui fait l'objet du reste de ce travail.

Le rôle des deux degrés de liberté du régulateur RST a été détaillé. La partie contre-réaction détermine les capacités de régulation, c'est-à-dire de stabilisation et de rejet des perturbations ; la partie filtrage de la consigne influence uniquement les capacités d'asservissement. Les performances en asservissement dépendent aussi de la contre-réaction. On peut ainsi synthétiser la contre-réaction en se basant sur les spécifications sur la régulation, puis ajuster les performances en asservissement en jouant sur le préfiltre.

Enfin, des conditions sur le degré des polynômes ont été définies. Elles permettent d'assurer la causalité du régulateur. Des conditions plus strictes sont nécessaires pour permettre la synthèse par placement de pôles standard ; nous ne les utiliserons pas pour les méthodes développées dans les deux prochains chapitres.

## Chapitre 2

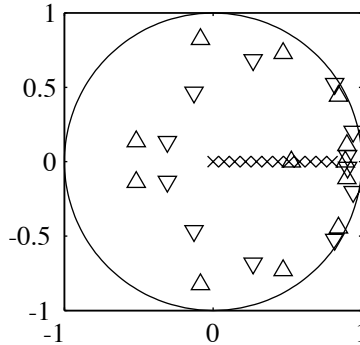
# Placement de pôles multimodèle

### 2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 l'intérêt de la synthèse par placement de pôles. Il vaut la peine d'en examiner les défauts pour voir dans quelle mesure on peut y remédier.

Contrairement aux méthodes classiques de synthèse, dans lesquelles on impose certaines marges de gain et de phase en manipulant la réponse harmonique en boucle ouverte, le placement de pôles ne donne aucune garantie de robustesse. Dans le plan complexe des pôles en boucle fermée, le fait de s'éloigner de la limite entre les zones de stabilité et d'instabilité n'augmente pas la robustesse ; au contraire, la rapidité de pôles bien amortis correspond à un gain élevé, synonyme de faibles marges de robustesse. Cela rend problématique la synthèse d'un régulateur basé sur un modèle nominal.

Pour l'illustrer, considérons un système dont les modes de résonance, au nombre de trois, varient fortement en fonction du changement d'un paramètre physique (il s'agit du bras souple qui sera présenté au chapitre 5). On désire obtenir un régulateur fixe pour trois charges différentes. La synthèse est faite par placement de pôles ; comme modèle nominal, on choisit celui qui correspond à la charge intermédiaire. En répartissant régulièrement les pôles en boucle fermée sur l'axe réel entre 0 et 0,8 pour éviter les problèmes numériques causés par des pôles multiples, on s'aperçoit que les pôles des autres modèles sont très éloignés (fig. 2.1). Les caractéristiques dynamiques en boucle fermée varient donc très fortement en fonction de la charge. Même si le choix des pôles en



**Figure 2.1**

Pôles en boucle fermée du modèle nominal (croix) et des deux autres modèles ( $\Delta$  et  $\nabla$ )

boucle fermée est arbitraire, le placement de pôles basé sur un modèle nominal unique n'est de toute évidence pas intrinsèquement robuste. On voit ainsi la nécessité de compléter le placement de pôles par une prise en compte de la robustesse.

Ce comportement paradoxal, souvent déroutant pour le débutant, peut être pris en compte de différentes façons. [Oga96] préconise de compléter la synthèse dans le plan des pôles en boucle fermée par l'analyse des réponses harmoniques et temporelles, qui donnent des indications claires quant à la robustesse du régulateur. Pour des systèmes simples où le nombre de pôles est faible, cela peut donner de bons résultats si les outils logiciels sont bien adaptés. [LCR93] propose d'agir aussi bien sur les pôles en boucle fermée qu'au niveau des parties fixes du régulateur pour modifier l'amplitude de la fonction de sensibilité.

Comme ce sont les gains de contre-réaction élevés qui diminuent la robustesse, on peut tenter de les éviter en limitant le déplacement des pôles du système : à un déplacement nul correspondrait une contre-réaction nulle, et une robustesse de stabilité totale si le système est stable en boucle ouverte. Ainsi, [dL93] propose de conserver les pôles rapides du système (ainsi que le symétrique des pôles instables par rapport à l'axe imaginaire dans le domaine de Laplace) et de projeter les pôles lents sur une droite  $\text{Re } s = -1/T_c$ , où  $T_c$  permet de spécifier la dynamique en boucle fermée. Les pôles ajoutés par le régulateur correspondent à la reconstruction de l'état du système et sont placés



de façon similaire.

Enfin, on peut tenir compte des incertitudes sur le système directement au niveau des pôles en boucle fermée. Lorsque les incertitudes sur les coefficients de la fonction de transfert du modèle sont contenues dans des ellipsoïdes, on peut déterminer le régulateur qui maximise le facteur par lequel on peut multiplier les incertitudes tout en assurant la stabilité robuste [RB91, PKG92, HPB95]. Les approches multimodèles évitent le conservatisme lié aux incertitudes bornées par des ensembles convexes. Rappelons à ce propos les approches d'Ackermann [ABK<sup>+</sup>94] et de Löhnberg [LvdW94] (cf. p. 7).

Notre placement de pôles multimodèle est proche de celui proposé par Löhnberg. Tout comme lui, il est basé sur un compromis entre plusieurs modèles obtenu par la méthode des moindres carrés. Il en diffère par les termes de la fonction-coût. Au lieu de considérer les coefficients du polynôme caractéristique, qui ne reflètent qu'indirectement les propriétés dynamiques du système en boucle fermée, on minimise l'erreur entre les pôles désirés et les pôles effectifs [PHL97a]. Des poids sont spécifiés indépendamment pour chacun d'entre eux. Associé à un programme de CAO interactive, cela permet de déplacer les pôles de façon à améliorer les performances.

Ce chapitre est consacré exclusivement à la synthèse de la contre-réaction, c'est-à-dire des polynômes  $R'(q)$  et  $S'(q)$ . Elle seule est déterminée par les pôles en boucle fermée. Les spécifications qui peuvent être prises en compte concernent les marges de robustesse et le rejet des perturbations.

La section 2.1 démontre l'impossibilité de placer arbitrairement les pôles en boucle fermée de plusieurs modèles. La section 2.2 présente le placement de pôles multimodèle approximatif, qui donne un compromis entre plusieurs modèles. La façon de pondérer les différents pôles est traitée dans la section 2.3. La sensibilité des pôles par rapport aux variations du régulateur, nécessaire au calcul du régulateur, est établie dans la section 2.4. Un algorithme de synthèse itératif est proposé dans la section 2.5. Enfin, la dernière section conclut le chapitre en rappelant ses idées maîtresses.

## 2.2 Placement de pôles multimodèle exact

Supposons que le système soit modélisé par un ensemble de  $n$  fonctions de transfert qui couvrent le domaine des incertitudes paramétriques, et que nous voulions synthétiser un régulateur fixe. Est-il possible d'étendre le placement de pôles décrit au chapitre 1 pour imposer arbitrairement les pôles en boucle

fermée pour chacun des modèles ? Le théorème suivant montre que la nécessité d'un régulateur causal l'interdit.

**Théorème 2.1** *Soient  $n$  modèles strictement causals  $B_k(q)/A_k(q)$ ,  $k = 1, \dots, n$  dont les numérateurs et dénominateurs sont tous de degré  $\deg B$  et  $\deg A$ . Soit la contre-réaction causale  $S(q)/R(q)$  définie par (1.3-1.4). Il est possible de choisir les degrés des polynômes du régulateur de telle sorte que les pôles en boucle fermée associés à tous les modèles puissent être spécifiés arbitrairement si et seulement si  $n = 1$ .*

**Démonstration** Le placement exact des pôles en boucle fermée associés à plusieurs modèles ne peut se faire que si la partie contre-réaction du régulateur (qui seule affecte le polynôme caractéristique) possède au moins autant de paramètres qu'il y a de pôles à placer. D'autre part, le degré du polynôme caractéristique augmente avec celui de  $R'(q)$ . Pour  $n$  modèles et  $\deg C = \deg A + \deg R_f + \deg R'$  pôles, il faut donc que  $n \deg C = n(\deg A + \deg R_f + \deg R') \leq \deg R' + \deg S' + 1$ , ou

$$\deg S' - (n - 1) \deg R' \geq n(\deg A + \deg R_f) - 1$$

Pour un ordre de modèle donné, le degré de  $S'(q)$  doit augmenter avec le nombre de modèles. En tenant compte de la condition de causalité 1.9 que l'on peut écrire  $\deg S' \leq \deg R' + \deg R_f - \deg S_f$ ,

$$\deg R' + \deg R_f - \deg S_f \geq \deg S' \geq (n - 1) \deg R' + n(\deg A + \deg R_f) - 1$$

En éliminant  $\deg S'$ , on a finalement

$$(2 - n) \deg R' \geq n \deg A + (n - 1) \deg R_f + \deg S_f - 1$$

Pour un modèle unique, le terme de gauche,  $\deg R'$ , peut être choisi suffisamment grand pour respecter cette condition. Pour un ensemble de deux modèles, le terme de droite doit être négatif ou nul. Comme tous les degrés sont non négatifs, sauf  $\deg A$  qui est strictement positif (les modèles sont strictement causals par hypothèse), il n'existe aucune solution. C'est également le cas si  $n > 2$ . ■

Si un placement de tous les pôles est impossible, un placement partiel pourrait sembler intéressant : finalement, seuls les pôles dominants ont de l'importance. Le corollaire 1.1 peut facilement être étendu au placement de  $\deg R' + \deg S' + 1$  pôles associés à différents modèles. Or, cette façon de

procéder conduit inévitablement à une mauvaise solution, généralement instable. En effet, rien ne permet d'imposer que les pôles spécifiés soient dominants. Les pôles restants sont extrêmement sensibles vis-à-vis des pôles spécifiés.

## 2.3 Compromis entre plusieurs modèles

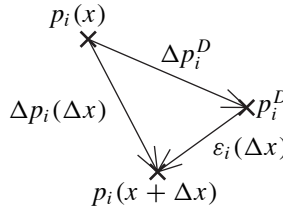
Le placement de pôles multimodèle exact étant impossible, il nous reste la possibilité de spécifier les *pôles désirés* en boucle fermée, et de faire en sorte que les pôles effectifs soient proches d'eux pour obtenir les caractéristiques voulues. On obtient ainsi un compromis entre les différents modèles, et une pondération judicieuse permet de remplir des spécifications de manière robuste, ou du moins de s'en approcher.

La minimisation de la distance entre les pôles désirés et les pôles effectifs pose un certain nombre de problèmes. Le premier d'entre eux réside dans le fait que les pôles ne sont pas ordonnés ; si les pôles désirés sont spécifiés en vrac, on ne peut pas associer de façon unique chaque pôle à l'un d'entre eux. A la place, on spécifie un *déplacement désiré* pour chaque pôle. Cela implique une synthèse itérative, au cours de laquelle les pôles sont déplacés progressivement pour améliorer les performances du régulateur. L'approche itérative se justifie aussi par le fait que la position relative des pôles entre les différents modèles est inconnue avant le début de la synthèse. La spécification a priori de pôles désirés n'aurait de sens que si ceux-ci étaient les mêmes pour tous les modèles ; or une dispersion des pôles effectifs autour du pôle désiré peut donner des résultats très différents s'ils sont proches du cercle unité. Les performances dépendent de la position des pôles dans leur ensemble, et non seulement de chaque pôle considéré séparément. Avec une approche itérative, on peut agir indépendamment sur chaque pôle de chaque modèle.

Pour une certaine itération, nous partons du régulateur  $x$  et le résultat de l'optimisation donne de nouveaux coefficients  $x + \Delta x$ . Nous pouvons définir trois pôles (cf. fig. 2.2) : le pôle  $p_i(x)$  au début de l'itération, le pôle désiré  $p_i^D$ , et le pôle  $p_i(x + \Delta x)$  à la fin de l'itération. On cherche à minimiser la longueur (nous verrons dans la prochaine section ce qu'il faut entendre par là) de

$$\varepsilon_i(\Delta x) = p_i(x + \Delta x) - p_i^D \quad (2.1)$$

La relation entre les pôles et les coefficients du polynôme caractéristique n'est évidemment pas linéaire ; il en va de même entre les pôles et les coefficients

**Figure 2.2**

Pôles au début de l'itération ( $p_i(x)$ ), à la fin ( $p_i(x + \Delta x)$ ), et désiré ( $p_i^D$ ).

du régulateur. Pour pouvoir utiliser la méthode standard des moindres carrés pour la minimisation, nous linéarisons le déplacement des pôles par rapport à une variation des coefficients du régulateur  $\Delta x$ . Nous obtenons ainsi

$$p_i(x + \Delta x) = p_i(x) + \frac{dp_i}{dx}(x)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.2)$$

Nous définissons le *déplacement désiré*

$$\Delta p_i^D = p_i^D - p_i(x) \quad (2.3)$$

En substituant  $p_i(x + \Delta x)$  et  $p_i^D$  dans (2.1) et en négligeant les termes de degré supérieur à 1, nous obtenons l'approximation linéaire  $\hat{\varepsilon}_i(\Delta x)$  de  $\varepsilon_i(\Delta x)$

$$\hat{\varepsilon}_i(\Delta x) = \frac{dp_i}{dx}(x)\Delta x - \Delta p_i^D \quad (2.4)$$

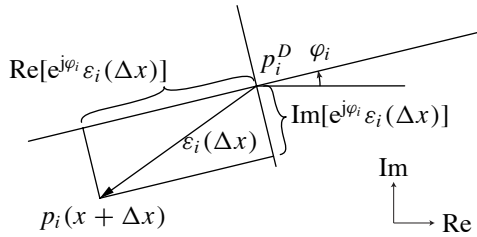
Le nouveau régulateur est obtenu en minimisant une fonction-coût  $J$  :

$$\Delta x_{\text{opt}} = \arg \min_{\Delta x} J(\hat{\varepsilon}_i(\Delta x)) \quad (2.5)$$

Il reste à définir la forme exacte de  $J$ . Le gradient de la position des pôles par rapport aux coefficients du régulateur sera établi à la section 2.5.

## 2.4 Pondération

Le calcul de la sensibilité des pôles en boucle fermée par rapport aux paramètres du régulateur permet de normaliser l'effet de spécifications sur les pôles. On

**Figure 2.3**

Pondération de l'erreur entre le pôle désiré  $p_i^D$  et le nouveau pôle en boucle fermée  $p_i(x + \Delta x)$  selon les directions  $\varphi_i$  et  $\varphi_i + \pi/2$ .

peut trouver ainsi un compromis qui minimise la somme des carrés des distances entre les pôles désirés et les pôles réellement obtenus. En fait, la robustesse et les performances du système régulé dépendent essentiellement des pôles dominants. Ceux-ci provoquent en effet des pics de résonance sur l'amplitude des réponses harmoniques d'autant plus marqués qu'ils sont proches du cercle unité ; les pôles proches de l'origine, par contre, ont peu d'influence sur l'amplitude.

Par ailleurs, le déplacement d'un pôle dominant peut avoir un effet très différent selon la direction ; par exemple, un faible déplacement en direction du cercle unité peut faire apparaître ou amplifier un pic de résonance. Un déplacement perpendiculaire au rayon ne changera que la fréquence à laquelle apparaît la résonance, ce qui est souvent moins gênant<sup>1</sup>. Ces deux raisons rendent souhaitable la pondération différenciée de l'erreur entre les pôles désirés et les pôles effectifs selon le pôle et la direction.

Pour chaque paire constituée d'un pôle désiré  $p_i^D$  et d'un pôle en boucle fermée  $p_i(x + \Delta x)$ , nous définissons une rotation d'angle  $\varphi_i$ , puis pondérons les parties réelle et imaginaire de l'erreur  $\varepsilon_i(\Delta x)$  respectivement par  $w_i$  et  $w_i^\perp$  (cf. fig. 2.3). Nous utilisons l'approximation (2.4) afin d'obtenir des termes linéaires par rapport à  $\Delta x$  et minimiser la fonction-coût avec la méthode standard des moindres carrés pondérés. Pour  $n$  modèles  $k = 1, \dots, n$  et  $\deg C$  pôles en boucle

<sup>1</sup>La présence de zéros peut changer l'effet du déplacement d'un pôle, mais ne remet pas en cause notre conclusion.

fermée par modèle, la fonction-coût  $J(\hat{\varepsilon}_i(\Delta x))$  vaut

$$J(\hat{\varepsilon}_i(\Delta x)) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\deg C} \left( w_i (\operatorname{Re}[e^{j\varphi_i} \hat{\varepsilon}_i(\Delta x)])^2 + w_i^\perp (\operatorname{Im}[e^{j\varphi_i} \hat{\varepsilon}_i(\Delta x)])^2 \right) \quad (2.6)$$

Pour que la solution soit réelle, il faut bien entendu que les déplacements désirés et les poids soient symétriques par rapport à l'axe réel.

## 2.5 Sensibilité régulateur-pôles

Lorsque les paramètres du régulateur varient, les pôles en boucle fermée changent de position. L'étude de ces variations est nécessaire pour permettre d'aborder le problème inverse, à savoir la modification des paramètres du régulateur en fonction du déplacement des pôles dans le but d'améliorer la dynamique du système en boucle fermée.

L'approximation (2.2) requiert le calcul de la dérivée du pôle  $p_i(x)$  par rapport aux coefficients du régulateur  $x$ . Il n'existe pas de relation explicite entre un polynôme de degré quelconque et ses zéros, mais nous pouvons recourir au théorème de la fonction implicite [MH93], dont le théorème suivant constitue le corollaire.

**Théorème 2.2** *Soient  $C(q, x)$  un polynôme caractéristique basé sur les coefficients du régulateur  $x$ , et  $p_i(x)$  un zéro simple de  $C(q, x)$ . Alors*

$$\frac{dp_i}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial C}{\partial x}(p_i(x), x)}{\frac{\partial C}{\partial q}(p_i(x), x)} \quad (2.7)$$

**Démonstration** Comme  $p_i(x)$  est un zéro de  $C(q, x)$ ,  $C(p_i(x), x) = 0$ . Soit  $\Delta x$  un petit changement des coefficients du régulateur. Le pôle se déplace en  $p_i(x + \Delta x)$ , et respecte l'égalité  $C(p_i(x + \Delta x), x + \Delta x) = 0$ . Le terme de gauche peut être développé en série de Taylor ; on obtient

$$\begin{aligned} \overbrace{C(p_i(x + \Delta x), x + \Delta x)}^0 &= \\ \underbrace{C(p_i(x), x)}_0 + \frac{\partial C}{\partial q}(p_i, x) (p_i(x + \Delta x) - p_i(x)) &+ \\ + \frac{\partial C}{\partial x}(p_i, x) \Delta x + O(\Delta x^2) & \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q}(p_i, x) (p_i(x + \Delta x) - p_i(x)) + \frac{\partial C}{\partial x}(p_i, x) \Delta x = O(\Delta x^2)$$

La dérivée  $\frac{\partial C}{\partial q}(p_i, x)$  est non nulle. En effet, comme  $p_i$  est un zéro simple de  $C(q, x)$ , on peut factoriser  $C(q, x)$  en  $(q - p_i)C'(q)$  ; alors  $\frac{\partial C}{\partial q}(p_i) = C'(p_i) \neq 0$ .

Le passage à la limite donne la dérivée recherchée :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dx}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p_i(x + \Delta x) - p_i(x)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\partial C}{\partial x}(p_i(x), x)}{\frac{\partial C}{\partial q}(p_i(x), x)} + O(\Delta x^2) \right) \\ &= - \frac{\frac{\partial C}{\partial x}(p_i(x), x)}{\frac{\partial C}{\partial q}(p_i(x), x)} \end{aligned}$$

■

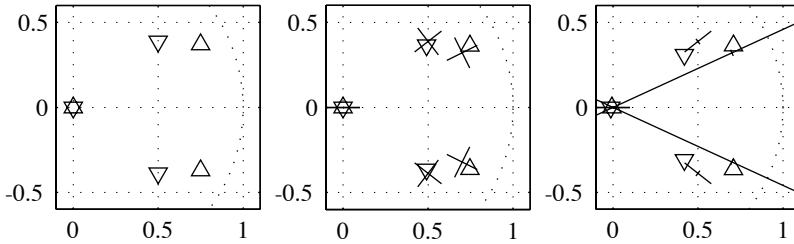
Le terme  $\partial C / \partial x$  peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{\partial C}{\partial x}(p_i(x), x) = \begin{bmatrix} p_i^{\deg C - 1} & p_i^{\deg C - 2} & \dots & 1 \end{bmatrix} M$$

où  $M$  est la matrice de Sylvester définie par (1.16).

**Exemple 2.1** Soit un système du premier ordre avec intégrateur. Les deux modèles considérés sont  $H_1(q) = 0,2q/(q - 0,9)(q - 1)$  et  $H_2(q) = 0,4q/(q - 0,8)(q - 1)$ . Un premier régulateur de type proportionnel-dérivateur numérique a été synthétisé ; sa fonction de transfert est  $S(q)/R(q) = (2q - 1)/q$ . En boucle fermée, il engendre un pôle à l'origine et deux pôles complexes conjugués, particulièrement mal amortis pour l'un des modèles (cf. fig. 2.4). On désire les déplacer de  $\Delta p_{2,3}^D = -0,1 \pm 0,1j$  en direction de l'origine. Dans un premier temps, on utilise des poids identiques pour les trois pôles des deux modèles. Le gradient des pôles par rapport aux coefficients du régulateur est donné par (2.7) avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T \\ \frac{\partial C_1}{\partial x}(p_i) &= \begin{bmatrix} p_{1i}^2 & p_{1i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0 \\ -1,9 & 0 & 0,4 \\ 0,9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



**Figure 2.4**

Effet de la pondération de l'erreur entre les pôles désirés et les pôles effectifs. A gauche, situation initiale ; au centre, poids identique sur tous les pôles (la direction n'a aucune influence) ; à droite, pondération plus forte dans la direction critique. Le centre des croix représente les pôles désirés  $p_i^D$ , et leurs branches, les poids  $w_i$  et  $w_i^\perp$ .

$$\frac{\partial C_2}{\partial x}(p_i) = \begin{bmatrix} p_{2i}^2 & p_{2i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ -1,8 & 0 & 0,2 \\ 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1(q, x) = q^3 - 1,5q^2 + 0,7q$$

$$C_2(q, x) = q^3 - q^2 + 0,4q$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial q}(p_{1i}, x) = 3p_{1i}^2 - 3p_{1i} + 0,7$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial q}(p_{2i}, x) = 3p_{2i}^2 - 2p_{2i} + 0,4$$

La fonction-coût à minimiser est

$$J = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 (\operatorname{Re}^2 \hat{\varepsilon}_{ki}(\Delta x) + \operatorname{Im}^2 \hat{\varepsilon}_{ki}(\Delta x))$$

où  $\hat{\varepsilon}_{ki}$  est donné par (2.4) ; l'indice  $k$  identifie le modèle.

Les pôles mal amortis suivent relativement mal les pôles désirés. On augmente alors d'un facteur 10 leur poids dans la direction de l'origine, et l'on



diminue d'un facteur 5 le poids des pôles complexes dans la direction perpendiculaire à l'origine. La fonction-coût est remplacée par

$$J = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 (w_{ki} \operatorname{Re}[e^{j\varphi_i} \hat{\varepsilon}_{ki}(\Delta x)]^2 + w_{ki}^\perp \operatorname{Im}[e^{j\varphi_i} \hat{\varepsilon}_{ki}(\Delta x)]^2)$$

On constate alors que les pôles critiques sont nettement mieux amortis. Cette amélioration se fait au détriment de la position désirée pour les pôles complexes de l'autre modèle, ce qui n'est pas gênant ici. ■

Si le pôle est multiple, sa dérivée par rapport à une variation du régulateur est infinie. En effet, le polynôme caractéristique peut s'écrire sous la forme  $C(q) = (q - p_m)^2 C'(q)$ , où  $p_m$  représente le pôle multiple ; alors

$$\frac{\partial C}{\partial q} = 2(q - p_m)C'(q) + (q - p_m)^2 \frac{\partial C'}{\partial q}$$

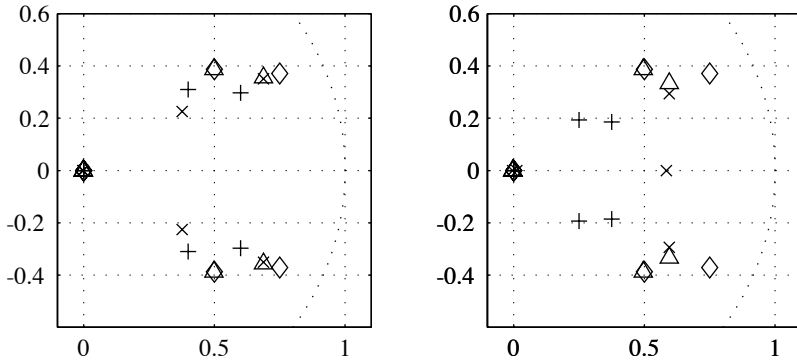
s'annule pour  $q = p_m$ . Lorsque deux pôles sont proches l'un de l'autre, le terme (2.4) est mal conditionné, ce qui peut provoquer des problèmes numériques.

Lorsque les pôles désirés sont trop éloignés des pôles associés à  $x$ , l'approximation (2.2) est mauvaise. La minimisation de  $J$  tend à garder les  $p_i(x) + dp_i/dx \Delta x$  proches de  $p_i^D$ , alors que ce qui nous intéresse est de positionner  $p_i(x + \Delta x)$ . Cette approximation est une seconde raison d'utiliser une approche itérative. Lorsque l'attraction qu'exerce  $p_i^D$  sur  $p_i(x + \Delta x)$  diminue, on pose  $x \leftarrow x + \Delta x$  et on calcule les nouveaux gradients.

**Exemple 2.2** Reprenons le système et le régulateur PD initial de l'exemple 2.1. On veut amortir davantage les pôles en boucle fermée en les déplaçant vers l'origine. Les pôles désirés sont obtenus en multipliant les pôles en boucle fermée associés au régulateur initial par un facteur  $\lambda$ . La figure 2.5 montre les pôles effectifs  $p_i(x + \Delta x)$  et approximés  $p_i(x) + dp_i/dx \Delta x$  pour  $\lambda = 0,8$  et  $0,5$ . On constate que plus les déplacements sont grands, plus les pôles effectifs s'éloignent de leur approximation. ■

Pour mieux comprendre les causes de l'erreur, on développe  $C(p_i(x + \Delta x), x + \Delta x)$  en série de Taylor jusqu'aux termes du deuxième degré (toutes les dérivées sont évaluées en  $p_i$  et  $x$ ):

$$\overbrace{C(p_i(x + \Delta x), x + \Delta x)}^0 =$$

**Figure 2.5**

Effet de l'approximation du déplacement des pôles. A gauche, les déplacements désirés valent  $\Delta p_i^D = -0,2p_i$  ; à droite,  $\Delta p_i^D = -0,5p_i$ . Les pôles initiaux  $p_i$  sont représentés par  $\diamond$ , les pôles désirés  $p_i^D$  par  $+$ , les nouveaux pôles  $p_i(x + \Delta x)$  par  $\times$  et leurs approximations par  $\triangle$ .

$$\underbrace{C(p_i(x), x)}_0 + \frac{\partial C}{\partial q} \Delta p_i + \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \Delta p_i^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial q \partial x} \Delta p_i \Delta x + \Delta x^T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^T \Delta x + O(\Delta x^3)$$

Comme  $C(q, x)$  est linéaire par rapport à  $x$ , l'avant-dernier terme est nul. En négligeant les termes d'ordre supérieur, on a

$$\Delta p_i \approx -\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{\frac{\partial C}{\partial q}} \Delta x - \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial q}}{\frac{\partial C}{\partial q}} \Delta p_i \Delta x - \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}}{\frac{\partial C}{\partial q}} \Delta p_i^2$$

L'approximation linéaire est d'autant meilleure que les deux derniers termes sont faibles. Ils deviennent infinis pour les pôles multiples, pour la même raison que celle évoquée à la page 29. Par continuité, ils sont grands lorsque  $p_i$  est proche d'un autre pôle. Par contre, l'augmentation du nombre de modèles n'a pas d'influence négative sur la qualité de l'approximation.

## 2.6 Algorithme de synthèse

Les pôles en boucle fermée déterminent la dynamique du système régulé. Cependant, dès que le nombre de pôles et de zéros dépasse deux, il devient difficile de prévoir l'allure des réponses harmoniques et temporelles. D'autre part, il est relativement facile d'identifier visuellement les *pôles critiques*, c'est-à-dire les pôles en boucle fermée responsables de tel ou tel effet au niveau des performances, tel que pics de résonance, temps d'établissement ou dépassement. Cela nous conduit à vouloir améliorer successivement le régulateur en examinant les réponses harmoniques et temporelles, à identifier les pôles responsables des effets non désirés, et à déplacer ceux-ci pour améliorer les performances. Nous obtenons l'algorithme suivant :

- 1) Calculer un régulateur initial  $x$
- 2) Tracer les réponses harmoniques et temporelles
- 3) S'arrêter si les performances sont satisfaisantes
- 4) Placer tous les pôles désirés aux mêmes positions que les pôles en boucle fermée et leur donner un poids égal
- 5) Identifier les pôles critiques
- 6) Augmenter leur poids dans la direction qui influence les performances
- 7) Déplacer les pôles critiques dans la direction qui tend à améliorer les performances
- 8) Calculer  $\Delta x_{\text{opt}}$  avec (2.5) et le nouveau régulateur  $x + \Delta x_{\text{opt}}$
- 9) Itérer à partir de l'étape 6 ou 7 jusqu'à ce que l'approximation de l'erreur entre les pôles désirés et les pôles obtenus devienne trop mauvaise pour continuer à améliorer les performances
- 10) Remplacer  $x$  par  $x + \Delta x_{\text{opt}}$
- 11) Itérer à partir de l'étape 2.

Les étapes 2–9 peuvent être rendues beaucoup plus commodes si l'on dispose d'un logiciel qui les rend interactives. Le chapitre 4 décrit un tel outil, SysQuake, développé dans le cadre de ce travail. Le régulateur initial doit avoir

les degrés et les parties fixes voulus, mais ses coefficients peuvent être quelconques. Cependant, il vaut mieux partir d'un régulateur proche d'une solution acceptable pour limiter le nombre d'itérations de placement de pôles multimodèle. Parmi toutes les méthodes de synthèse qui pourraient être utilisées, nous en retenons deux. La première consiste à avoir un polynôme  $S'(q) = 0$  (ce qui est possible puisque  $S'(q)$  n'a pas besoin d'être monique) et à choisir pour  $R'(q)$  des pôles distincts bien amortis et différents des zéros de  $A(q)R_f(q)$ . Le système régulé est instable si  $A(q)R_f(q)$  contient un intégrateur (ce qui est souvent le cas), ou plus généralement si le système est instable, mais ce n'est pas gênant pour le placement de pôles multimodèle.

La seconde méthode est le placement de pôles standard interactif. Un programme qui permet de manipuler les pôles correspondant à un modèle tout en observant le déplacement des autres pôles peut être très efficace. On déplace successivement chaque paire de pôles instables dans la région de stabilité en évitant dans la mesure du possible de déstabiliser d'autres pôles, sans se préoccuper de savoir à quel modèle ils correspondent. SysQuake permet aussi ce genre de manipulation.

## 2.7 Conclusions

Nous avons vu que le placement de pôles basé sur un modèle nominal ne permet pas d'obtenir de bonnes performances lors de variations paramétriques importantes. Pour y pallier, nous avons étudié l'utilisation de plusieurs modèles associés à différents points de fonctionnement. Le placement de pôles multimodèle exact est impossible ; il faut recourir à un placement approximatif.

Une méthode permettant de spécifier des déplacements désirés pour les pôles en boucle fermée de tous les modèles et d'obtenir un régulateur qui assure un compromis acceptable a été développée. La distance entre les pôles désirés et les pôles effectifs est linéarisée par rapport aux coefficients du régulateur, pondérée selon des directions préférentielles (les directions critiques), et minimisée avec la méthode des moindres carrés.

La méthode proposée peut être utilisée dans le cadre d'une synthèse itérative, au cours de laquelle les performances du système régulé sont améliorées en fonction du cahier des charges. Comme l'effet des pôles sur les réponses harmoniques et temporelles est bien connu, des spécifications très diverses peuvent être prises en compte.

# Chapitre 3

## Optimisation multiobjective

### 3.1 Introduction

Le placement de pôles multimodèle donne de bons résultats, mais on peut lui faire un reproche : ce qui nous intéresse finalement est d'obtenir un certain niveau de performances, et celles-ci sont rarement spécifiées en termes de pôles en boucle fermée. Un cahier des charges typique inclut des contraintes sur les réponses harmoniques pour garantir la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes non structurées et le rejet de perturbations à certaines fréquences, ainsi que sur les réponses temporelles pour obtenir le comportement transitoire désiré. Il serait commode d'agir non pas sur les pôles, mais directement sur les réponses harmoniques et temporelles, tout en conservant les avantages de l'approche présentée au chapitre 2 :

- la synthèse multimodèle, qui fournit la robustesse par rapport à de larges variations paramétriques ;
- la synthèse itérative, qui permet d'améliorer les performances jusqu'à un compromis acceptable.

L'idée générale consiste à utiliser un indice de performances multiobjectif unique qui prend une valeur inférieure à 1 lorsque toutes les spécifications sont remplies. Cet indice dépend d'un certain nombre de valeurs scalaires, telles que le dépassement de la réponse indicielle et les maxima de l'amplitude de fonctions de sensibilité. Sa minimisation conduit à un régulateur qui réalise

un compromis entre toutes les spécifications. Au lieu d'un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés, analogue au placement de pôles multimodèle [PHL97b], nous résoudrons un problème de type minimax [PD77].

La suite de ce chapitre commence, à la section 3.2, par une description générale de notre méthode d'optimisation multiobjective. La paramétrisation du régulateur sera exposée à la section 3.3. Les expressions des gradients utilisés pour les spécifications sur les réponses temporelles et harmoniques sont développées respectivement dans les sections 3.4 et 3.5. L'optimisation multiobjective peut être utilisée soit pour obtenir directement les coefficients des trois polynômes du régulateur RST, soit uniquement pour le préfiltre, ce qui simplifie beaucoup l'algorithme ; ces deux approches sont décrites dans les sections 3.6 et 3.7. La section 3.8 termine le chapitre par la conclusion.

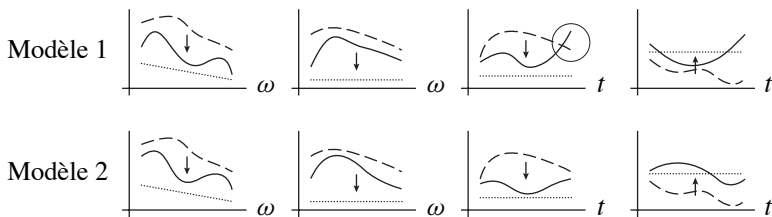
## 3.2 Optimisation multiobjective

Le cahier des charges pour la conception d'un régulateur comprend typiquement un certain nombre de spécifications sur des grandeurs liées à la robustesse et aux performances. Ces grandeurs peuvent être de trois types :

- fonctions continues, telles que le module des fonctions de sensibilité ;
- fonctions échantillonnées, telles que les signaux de sortie ou de commande ;
- nombres scalaires, tels que l'intégrale *ie* de la valeur absolue de l'erreur.

Dénotons par  $j$  le numéro de la spécification, par  $k$  celui du modèle et par  $\xi$  la pulsation ou le temps si la spécification ne porte pas sur une grandeur scalaire. Nous utiliserons la variable  $\Omega = \{j, k, \xi\}$  pour représenter ces trois valeurs. Les grandeurs considérées associées au régulateur RST paramétré par  $x'$  sont désignées par  $\alpha(\Omega, x')$ .

Les spécifications sont données sous la forme de bornes supérieures ou inférieures  $\beta(\Omega)$  (cf. fig. 3.1). Pour chaque spécification, une valeur cible  $\bar{\beta}(\Omega) \neq \beta(\Omega)$  est définie, même si elle est au-delà de ce qu'il est possible d'atteindre [SBG97] ; elle donne la direction dans laquelle les grandeurs considérées doivent tendre. Ainsi  $\beta$  est une borne supérieure si  $\beta > \bar{\beta}$ , et inférieure si  $\beta < \bar{\beta}$ . Le choix de  $\bar{\beta}$  ne dépend que de  $\beta$  ; un croisement de  $\alpha$  et  $\bar{\beta}$  n'a aucune importance. Cette façon de définir  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  permet de calculer, pour un modèle, une spécification et éventuellement une pulsation ou un temps donnés,


**Figure 3.1**

Exemple de spécifications pour deux modèles. Les grandeurs considérées  $\alpha(\Omega, x')$  sont en trait plein, les spécification  $\beta(\Omega)$  en traitillé et les valeurs cibles  $\bar{\beta}(\Omega)$  en pointillé. Les flèches indiquent la direction de l'optimisation. Le cercle désigne la violation d'une spécification.

un indice  $(\alpha - \bar{\beta})/(\beta - \bar{\beta})$  qui est inférieur à 1 si et seulement si la spécification est respectée.

**Exemple 3.1** On désire une marge de module supérieure à  $-6$  dB et un dépassement de la réponse indicielle inférieur à  $10\%$  pour tous les modèles  $k = 1, \dots, n$ . La marge de module est l'inverse de la norme  $H_\infty$  de la sensibilité  $\hat{S}(e^{j\omega})$ . La grandeur optimisée est donc  $\alpha(\{1, k, \omega\}, x') = |\hat{S}(e^{j\omega}, x')|$ , et la borne  $\beta(\{1, k, \omega\}) = 6 \text{ dB} = 2$  pour  $0 \leq \omega \leq \pi$ . La valeur cible, qui donne la direction de l'optimisation, est  $\bar{\beta}(\{1, k, \omega\}) = 0$ . Cela permet de changer facilement la borne  $\beta(\{1, k, \omega\})$  si l'on veut par exemple atténuer davantage les perturbations à basse fréquence, sans risquer de provoquer le croisement de  $\beta(\{1, k, \omega\})$  et de  $\bar{\beta}(\{1, k, \omega\})$ .

Pour limiter le dépassement de la réponse indicielle, la grandeur optimisée est tout naturellement la réponse indicielle  $\alpha(\{2, k, t\}, x') = H_{ck}(q, x')s(t)$ , et la borne  $\beta(\{2, k, t\}) = 1, 1$  pour  $t \geq 0$ . Pour la valeur cible, le plus simple est de poser  $\bar{\beta}(\{2, k, t\}) = 1$ . Définir  $\bar{\beta}(\{2, k, t\}) = 0$  serait maladroit, car l'indice  $(\alpha - \bar{\beta})/(\beta - \bar{\beta})$  ne pourrait pas descendre au-dessous de  $1/1, 1 = 91\%$  du gain statique en asservissement; comme nous allons le voir, cela limiterait inutilement l'optimisation. ■

**Tableau 3.1**

Spécifications pour l'exemple 3.2. Les références au modèle  $k$  sont omises par manque de place.

Grandeur à optimiser	Borne	Valeur cible
$\alpha(\{1,\omega\},x') =  \hat{S}(j\omega) $	$\beta(\{1,\omega\}) = 2$	$\bar{\beta}(\{1,\omega\}) = 0$
$\alpha(\{2,t\},x') = \frac{BS}{AR + BS} s(t)$	$\beta(\{2,t\},t) = \begin{cases} 1,1 & \text{si } t < 30 \\ 1,02 & \text{si } t \geq 30 \end{cases}$	$\bar{\beta}(\{2,t\},t) = 1$
$\alpha(\{3,t\},x') = \frac{BS}{AR + BS} s(t)$	$\beta(\{3,t\},t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } t < 30 \\ 0,98 & \text{si } t \geq 30 \end{cases}$	$\bar{\beta}(\{3,t\},t) = 1$

A partir de là, on définit l'*indice de performances multiobjectif*  $\chi(x')$  associé au régulateur  $x'$ , qui est inférieur à 1 si toutes les spécifications sont respectées :

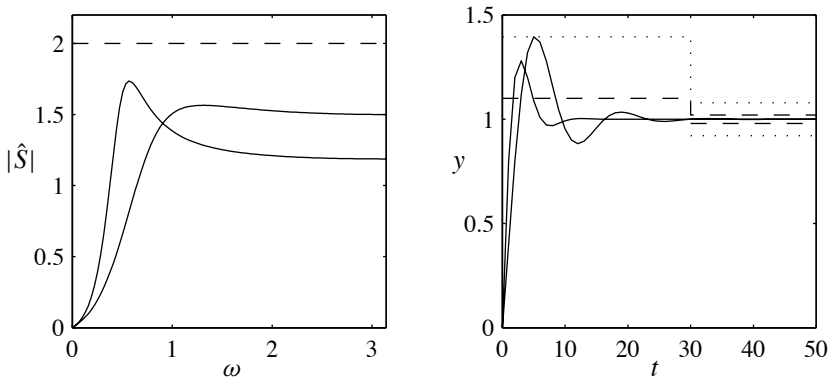
$$\chi(x') = \sup_{\Omega} \frac{\alpha(\Omega, x') - \bar{\beta}(\Omega)}{\beta(\Omega) - \bar{\beta}(\Omega)} \quad (3.1)$$

L'indice de performances permet de modifier les spécifications de telle sorte qu'elles soient toutes satisfaites et qu'au moins l'une d'entre elles soit à la limite des performances. Ces nouvelles spécifications  $\beta^*$  valent

$$\beta^*(\Omega) = (1 - \chi(x')) \bar{\beta}(\Omega) + \chi(x') \beta(\Omega) \quad (3.2)$$

**Exemple 3.2** Reprenons le système de l'exemple 2.1 (p. 27) et son régulateur PD. Nous voulons que l'amplitude de la fonction de sensibilité soit inférieure à 2 à toutes les fréquences (ce qui garantit des marges de robustesse raisonnables), et que la réponse indicielle ait un dépassement inférieur à 10 % et un temps d'établissement à  $\pm 2\%$  inférieur à 30. Avec les notations que nous avons introduites, on obtient les spécifications du tableau 3.1. La figure 3.2 montre les fonctions de sensibilité et les réponses indicielles associées aux deux modèles, les bornes  $\beta(\Omega)$  et les bornes modifiées  $\beta^*(\Omega)$ . L'indice de performances vaut  $\chi(x') = 3,96 > 1$ , ce qui signifie que toutes les spécifications ne sont pas respectées. On remarque en effet que le dépassement est près de quatre fois trop grand. ■



**Figure 3.2**

Critères de performances pris en compte pour l'exemple 3.2. A gauche, amplitude de la fonction de sensibilité ; à droite, réponse indicielle. Les spécifications  $\beta(\Omega)$  sont en traitillé, et les spécifications modifiées  $\beta^*(\Omega)$  en pointillé.

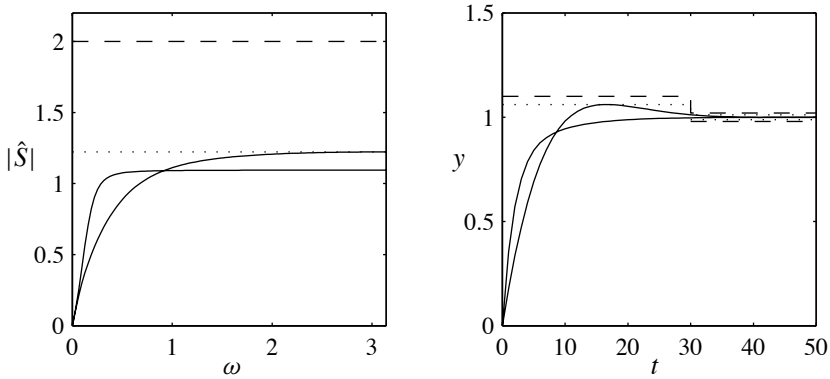
Le régulateur  $x'_{\text{opt}}$  que nous cherchons à obtenir est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\underset{x'}{\text{minimiser}} \quad \left( \chi(x') = \sup_{\Omega} \frac{\alpha(\Omega, x') - \bar{\beta}(\Omega)}{\beta(\Omega) - \bar{\beta}(\Omega)} \right) \quad (3.3)$$

Une recherche exhaustive dans une région de l'espace de  $x'$  n'est envisageable que si le nombre de paramètres ne dépasse pas 2 ou 3.

**Exemple 3.3** Le régulateur PD de l'exemple 3.2 peut être paramétré par  $x' = [x_1 \ x_2]$  ; sa fonction de transfert est  $S(q)/R(q) = (x_1 q + x_2)/q$ . Une recherche du régulateur qui minimise  $\chi(x')$  dans l'espace de  $x'$  conduit à la solution optimale  $S(q)/R(q) = (0,8910q - 0,7480)/q$ , avec  $\chi_{\text{opt}} = 0,6113$  ; la solution satisfait donc toutes les spécifications, comme on peut le vérifier sur la figure 3.3. ■

Remarquons la ressemblance entre l'optimisation (3.3) et d'autres méthodes de synthèse de régulateurs robustes, telles que la minimisation de la norme  $H_{\infty}$  des fonctions de sensibilité. Les mêmes méthodes de résolution ne peuvent pas



**Figure 3.3**

Critères de performances pris en compte pour l'exemple 3.3 avec le régulateur optimal. A gauche, amplitude de la fonction de sensibilité ; à droite, réponse indicielle. Les spécifications  $\beta(\Omega)$  sont en traitillé, et les spécifications modifiées  $\beta^*(\Omega)$  en pointillé.

être utilisées, car dans notre cas les spécifications portent sur des critères de performances quelconques.

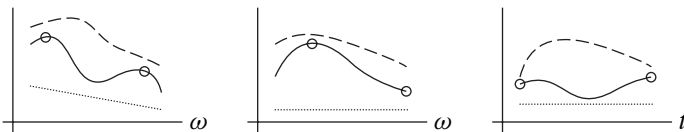
L'optimisation directe est un problème difficile. Nous proposons de remplacer dans (3.3) les fonctions continues et échantillonnées par un ensemble fini de termes évalués en  $\Omega_i$ . Les points  $\Omega_i$ , appelés *objectifs critiques*, sont choisis de telle sorte qu'ils correspondent aux maxima locaux de  $(\alpha - \bar{\beta})/(\beta - \bar{\beta})$  par rapport à  $t$  ou à  $\omega$  (cf. fig. 3.4). Ils sont redéfinis à chaque itération durant l'optimisation. En posant

$$\chi_i(x') = \frac{\alpha(\Omega_i, x') - \bar{\beta}(\Omega_i)}{\beta(\Omega_i) - \bar{\beta}(\Omega_i)} \quad (3.4)$$

le problème d'optimisation multiobjective devient

$$\text{minimiser}_{x'} \left( \chi(x') = \max_i \chi_i(x') \right) \quad (3.5)$$

Une méthode de descente de gradient sous contraintes peut être utilisée, pour autant que le minimum local obtenu donne satisfaction. Dans ce cas, le point de départ a une grande importance. Il est préférable de partir d'un régulateur


**Figure 3.4**

Choix des objectifs critiques. Les grandeurs considérés  $\alpha(\Omega, x')$  sont en trait plein, les spécifications  $\beta(\Omega)$  en traitillé et les valeurs cibles  $\tilde{\beta}(\Omega)$  en pointillé. Les cercles désignent les objectifs critiques.

proche des spécifications. D'autres approches peuvent être envisagées, telles que le recuit simulé [PTVF92].

La solution de (3.5) n'est pas forcément Pareto-optimale. En effet, la minimisation de  $\chi$  peut être bloquée par l'un des  $\chi_i$ , alors que d'autres objectifs pourraient encore être améliorés. Prenons le cas d'un régulateur à deux degrés de liberté. En ne tenant compte que de la régulation, on obtient une contre-réaction  $S(q)/R(q)$  qui donne une borne inférieure pour  $\chi$ . Suivant les spécifications sur l'asservissement, il se peut que le maximum des  $\chi_i$  qui leur sont associés soit inférieur. Mais l'optimisation globale ne conduira pas à cet optimum. Cette situation doit être assez rare, car dans la plupart des cas les objectifs sont contradictoires et agissent simultanément sur tous les paramètres du régulateur ; l'optimum est alors réellement un compromis.

Si l'on désire néanmoins garantir que la solution soit Pareto-optimale, on peut procéder en deux étapes. Dans un premier temps, on résout le problème (3.5) qui donne la solution  $x'_{\text{opt}}$ . Puis on optimise le problème suivant pour forcer chaque objectif vers un minimum, et on obtient une solution Pareto-optimale  $x'_{\text{p-opt}}$ .

$$\begin{array}{ll} \underset{x'}{\text{minimiser}} & \sum_i \chi_i(x') \\ \text{sous contraintes} & \chi_i(x') - \chi_i(x'_{\text{opt}}) \leq 0 \quad \forall i \end{array} \quad (3.6)$$

Les contraintes assurent que l'indice de performances multiobjectif est conservé.

**Théorème 3.1** *Le régulateur qui est solution de (3.6), où  $x'_{\text{opt}}$  est solution de (3.5), est Pareto-optimal et minimise  $\max_i \chi_i$ .*

**Démonstration** Les contraintes  $\chi_i(x') - \chi_i(x'_{\text{opt}}) \leq 0$  imposent que  $\max_i \chi_i(x'_{\text{p-opt}}) \leq \max_i \chi_i(x'_{\text{opt}})$ . Comme  $x'_{\text{opt}}$  minimise  $\max_i \chi_i(x'_{\text{opt}})$ ,  $\max_i \chi_i(x'_{\text{p-opt}}) = \max_i \chi_i(x'_{\text{opt}})$  et il en est de même pour  $x'_{\text{p-opt}}$ .

Pour montrer que  $x'_{\text{p-opt}}$  est Pareto-optimal, supposons que tel ne soit pas le cas et qu'il existe une solution  $x'_<$  telle que pour certains  $j$ ,  $\chi_j(x'_{\text{p-opt}}) - \chi_j(x'_<) = \epsilon_j > 0$ , et  $\chi_i(x'_<) = \chi_i(x_{\text{p-opt}})$  pour  $i \neq j$ . Les contraintes  $\chi_i(x'_<) - \chi_i(x'_{\text{opt}}) \leq 0$  seraient respectées. Mais

$$\sum_i \chi_i(x'_<) = \sum_i \chi_i(x'_{\text{p-opt}}) - \overbrace{\sum_j \epsilon_j}^{>0} < \sum_i \chi_i(x'_{\text{p-opt}})$$

ce qui est impossible puisque  $x'_{\text{p-opt}}$  minimise  $\sum_i \chi_i(x'_{\text{p-opt}})$ . ■

Notons que si les méthodes d'optimisation utilisées pour résoudre les problèmes (3.5) et (3.6) ne fournissent que des optima locaux, le théorème 3.1 lui-même doit être compris dans un sens local.

### 3.3 Paramétrisation du régulateur

De façon analogue au placement de pôles multimodèle, nous rassemblons les paramètres du régulateur dans un vecteur  $x'$ . En plus des polynômes libres de la contre-réaction  $R'(q)$  et  $S'(q)$ , nous ajoutons le préfiltre  $T'(q)$ :

$$x' = [ r'_1 \quad \cdots \quad r'_{\text{deg } R'} \quad s'_0 \quad \cdots \quad s'_{\text{deg } S'} \quad t'_1 \quad \cdots \quad t'_{\text{deg } T'} ]^T \quad (3.7)$$

Les paramètres  $r_0$  et  $t_0$  sont omis, le premier parce que  $R'(q)$  est monique, et le second parce que nous forçons un gain statique unité pour la fonction de transfert consigne-sortie. Par souci de simplicité, nous supposons que  $A(q)R_f(q)$  contient un zéro en 1, c'est-à-dire que le système régulé possède un intégrateur en boucle ouverte. Ainsi le gain statique vaut  $B(1)T(1)/(A(1)R(1)+B(1)S(1)) = T(1)/S(1)$ . Comme par définition  $S_f(1) = T_f(1) = 1$ ,

$$t'_0 = \sum_{i=0}^{\text{deg } S'} s'_i - \sum_{i=1}^{\text{deg } T'} t'_i \quad (3.8)$$

Les gradients des indices de performances liés aux réponses harmoniques sont fonctions des gradients de  $R'(e^{j\omega})$ ,  $S'(e^{j\omega})$  et  $T'(e^{j\omega})$  par rapport à  $x'$ . La définition de  $x'$  rend leur expression très simple.

**Lemme 3.1** *Les gradients de  $R'(e^{j\omega})$ ,  $S'(e^{j\omega})$  et  $T'(e^{j\omega})$  valent respectivement*

$$\frac{dR'}{dx'}(e^{j\omega}) = [ e^{j\omega \cdot (\deg R' - 1)} \quad \dots \quad e^{j\omega} \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ] \quad (3.9)$$

$$\frac{dS'}{dx'}(e^{j\omega}) = [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad e^{j\omega \cdot (\deg S')} \quad \dots \quad e^{j\omega} \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ] \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{dx'}(e^{j\omega}) = & [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad e^{j\omega \cdot (\deg T' - 1)} \quad \dots \quad e^{j\omega} \quad 1 ] + \\ & e^{j\omega \cdot \deg T'} [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 ] \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Démonstration** Les gradients de  $R'(e^{j\omega})$  et  $S'(e^{j\omega})$  résultent directement de la définition de  $x'$ . Celui de  $T'(e^{j\omega})$  s'exprime plus facilement par rapport à  $x'_* = [ r'_1 \quad \dots \quad r'_{\deg R'} \quad s'_0 \quad \dots \quad s'_{\deg S'} \quad t'_0 \quad t'_1 \quad \dots \quad t'_{\deg T'} ]$  qui contient  $t'_0$ :

$$\frac{dT'}{dx'_*}(e^{j\omega}) = [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad e^{j\omega \cdot \deg T'} \quad \dots \quad e^{j\omega} \quad 1 ]$$

L'équation (3.8) donne

$$\frac{dx'_*}{dx'} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & -1 \dots -1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

et la règle  $\frac{dT'}{dx'} = \frac{dT'}{dx'_*} \cdot \frac{dx'_*}{dx'}$  l'équation (3.11). ■

L'ensemble des régulateurs paramétrés par  $x$  comprend ceux qui déstabilisent les modèles du système. Il faut donc vérifier à chaque pas de l'optimisation que la stabilité est bien respectée. Dans la plupart des cas, des objectifs de stabilité robuste figurent parmi les spécifications qui tendent à éviter les régulateurs déstabilisants; citons par exemple une borne sur le module de la sensibilité, ou sur l'erreur après un saut de perturbation ou de consigne si la fenêtre de temps est assez large. Le régulateur optimal assure alors la stabilité robuste.

D'autres méthodes d'optimisation évitent ce problème en choisissant une paramétrisation qui garantisse la stabilité [YJB76]. Ce n'est pas possible dans notre cas, car la stabilité doit être respectée pour plusieurs modèles.

### 3.4 Fonctions de sensibilité

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'amplitude de la fonction de sensibilité  $\hat{S}(e^{j\omega})$  est directement liée à la robustesse vis-à-vis de la stabilité. Des contraintes permettent d'assurer de bonnes marges de robustesse. De même, la fonction de sensibilité complémentaire  $\hat{T}(e^{j\omega})$  donne (au signe près) la sensibilité au bruit de mesure sur la sortie, que l'on souhaite atténuer en dehors de la bande passante pour éviter d'exciter les modes non modélisés et de saturer la commande. Dans la bande passante, par contre, il vaut mieux ne donner aucune spécification sur  $\hat{T}$ . D'une part, la relation  $\hat{S} + \hat{T} = 1$  empêche de diminuer simultanément les deux sensibilités aux mêmes fréquences ; d'autre part, même avec un régulateur à deux degrés de liberté, l'effet bénéfique de la contre-réaction sur l'asservissement (l'insensibilisation par rapport aux défauts de modélisation ou aux variations du système) serait diminué. Enfin, d'autres fonctions, telles que la sensibilité perturbation-commande, peuvent être envisagées.

Seul le module des fonctions de sensibilité nous intéresse. Leur phase a certes une influence sur la forme des réponses temporelles, et notamment leur comportement transitoire, mais il est beaucoup plus facile d'obtenir l'effet désiré en imposant des gabarits directement sur elles. Le lemme suivant permet de calculer le gradient de la valeur absolue d'une fonction complexe à partir du gradient de la fonction.

**Lemme 3.2** Soit une fonction  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto f(x)$ . Le gradient de sa valeur absolue  $|f(x)|$  vaut

$$\frac{d}{dx} |f(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \left( \operatorname{Re} f(x) \operatorname{Re} \frac{df}{dx}(x) + \operatorname{Im} f(x) \operatorname{Im} \frac{df}{dx}(x) \right) \quad (3.12)$$

**Démonstration** Soit  $g(x) = |f(x)|^2 = \operatorname{Re}^2 f(x) + \operatorname{Im}^2 f(x)$ . Comme  $x$  est réel,  $\frac{d}{dx} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} \frac{df}{dx}(x)$ ,  $\frac{d}{dx} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} \frac{df}{dx}(x)$ , et

$$\frac{dg}{dx}(x) = 2 \operatorname{Re} f(x) \operatorname{Re} \frac{df}{dx}(x) + 2 \operatorname{Im} f(x) \operatorname{Im} \frac{df}{dx}(x)$$

**Tableau 3.2** Gradient des fonctions de sensibilité

Sensibilité	Fonction de transfert	Gradient
$\hat{S}(e^{j\omega})$	$\frac{AR}{C}$	$\frac{ABR_f S_f}{C^2} \left( S' \frac{dR'}{dx'} - R' \frac{dS'}{dx'} \right)$
$\hat{T}(e^{j\omega})$	$\frac{BS}{C}$	$\frac{ABR_f S_f}{C^2} \left( R' \frac{dS'}{dx'} - S' \frac{dR'}{dx'} \right)$
$\hat{S}_{up}(e^{j\omega})$	$-\frac{AS}{C}$	$\frac{A^2 R_f S_f}{C^2} \left( S' \frac{dR'}{dx'} - R' \frac{dS'}{dx'} \right)$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |f(x)| &= \frac{d}{dx} \sqrt{g(x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot \frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{2|f(x)|} \cdot \frac{dg}{dx}(x) \end{aligned}$$

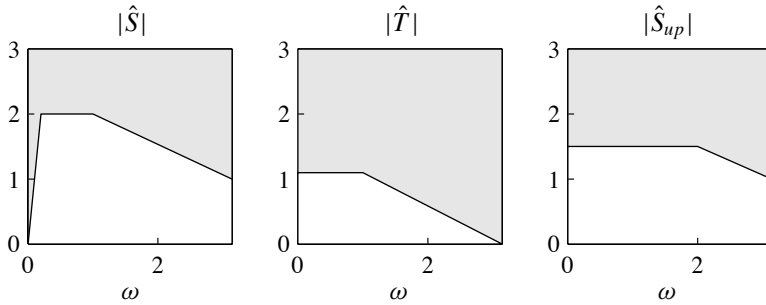
Ces deux équations donnent finalement (3.12). ■

L'application de ce lemme au calcul du gradient du module de différentes fonctions de sensibilité est aisée. Le tableau 3.2 donne le gradient de  $\hat{S}(e^{j\omega})$ ,  $\hat{T}(e^{j\omega})$  et  $\hat{S}_{up}(e^{j\omega})$ .

La figure 3.5 montre des spécifications possibles sur le module de la fonction de sensibilité  $|\hat{S}(e^{j\omega})|$ , de la fonction de sensibilité complémentaire  $|\hat{T}(e^{j\omega})|$  et de la fonction de sensibilité perturbation-entrée  $|\hat{S}_{up}(e^{j\omega})|$ . La borne supérieure sur  $|\hat{S}(e^{j\omega})|$  est équivalente à une limite sur la marge de module ; celle sur  $|\hat{T}(e^{j\omega})|$  permet de limiter l'effet du bruit de mesure sur la sortie, et  $|\hat{S}_{up}(e^{j\omega})|$  celui de la perturbation sur la commande. A basse fréquence, la borne supérieure sur  $|\hat{S}(e^{j\omega})|$  garantit le rejet de perturbations dans la bande passante.

### 3.5 Réponses temporelles

Le cahier des charges contient le plus souvent des spécifications sur les réponses temporelles. Des temps de rejet de perturbations peuvent être demandés en régulation, même si des conditions sur les fonctions de sensibilité suffisent souvent à assurer un bon comportement. En effet, on connaît généralement

**Figure 3.5**

De gauche à droite, exemples de spécifications sur le module de  $\hat{S}(e^{j\omega})$ , de  $\hat{T}(e^{j\omega})$  et de  $\hat{S}_{up}(e^{j\omega})$ .

mieux le contenu harmonique des perturbations que leur forme. C'est donc surtout pour l'asservissement que des conditions très strictes sont nécessaires pour conserver la forme des signaux et éviter les saturations.

La figure 3.6 montre des spécifications sur la sortie après un saut de consigne (asservissement) ou de perturbation (régulation). Pour l'asservissement, la borne supérieure limite le dépassement et le temps d'établissement ; la borne inférieure limite les temps de montée et d'établissement. En régulation, les bornes supérieures et inférieures imposent un certain temps d'amortissement. En plus de bornes sur l'amplitude des réponses, on peut considérer l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur.

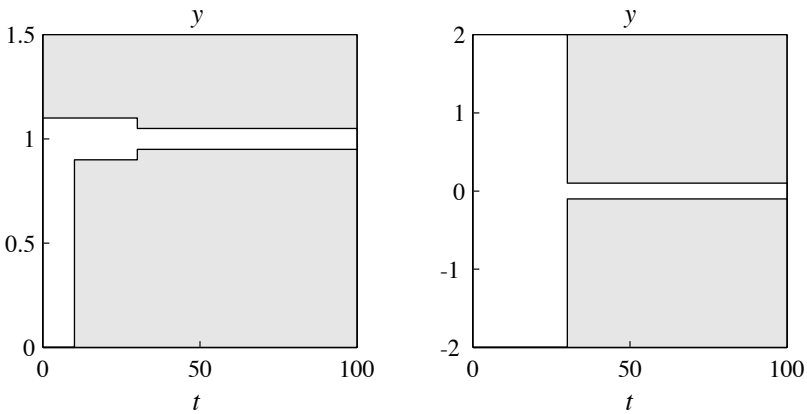
Considérons la réponse indicielle de  $N(q)/C(q)$ , où  $N(q) = n_0q^{\deg N} + \dots + n_{\deg N}$  dépend des signaux considérés. En boucle fermée, le dénominateur est toujours le polynôme caractéristique  $C(q)$ . Le signal de sortie considéré est

$$v(t) = - \sum_{i=1}^{\min(\deg C, t)} c_i v(t-i) + \sum_{i=0}^{\deg N + \min(0, t - \deg C)} n_i$$

et son gradient par rapport à  $x'$

$$\frac{dv(t)}{dx'} = - \sum_{i=1}^{\min(\deg C, t)} \left( \frac{dc_i}{dx'} v(t-i) - c_i \frac{dv(t-i)}{dx'} \right) + \sum_{i=0}^{\deg N + \min(0, t - \deg C)} \frac{dn_i}{dx'}$$



**Figure 3.6**

Exemples de spécifications sur la sortie après un saut de consigne (à gauche) ou de perturbation.

Le gradient  $dv(k)/dx'$  peut être calculé récursivement pour n'importe quel échantillon  $t$ . En plus des réponses indicielles, on limite parfois l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur après un saut de perturbation,  $ie$ , dont la version échantillonnée vaut

$$ie = \sum_{t=0}^{\infty} |v(t)| \quad (3.13)$$

Son gradient vaut

$$\frac{die}{dx'} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{dv(t)}{dx'} \text{sign}v(t) \quad (3.14)$$

Pour la réponse indicielle en asservissement, le temps d'établissement et le dépassement maximum peuvent être spécifiés au moyen de bornes. Il en va différemment pour le *temps de montée*  $t_m$ . Si on le définit comme le temps nécessaire pour atteindre 90 % de la valeur de consigne, une façon de faire est de maximiser l'échantillon de plus grande amplitude compris entre 0 et  $t_m$ . Le risque est malheureusement de rendre plus difficile la convergence vers une solution au cas où deux maxima sont sélectionnés alternativement. Cela reflète en fait le manque de robustesse du choix du temps de montée comme critère de performance. Il vaut mieux le remplacer par des temps d'établissement définis

pour différentes amplitudes lorsque qu'on a la liberté d'adapter le cahier des charges.

### 3.6 Optimisation simultanée

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la synthèse d'un régulateur à deux degrés de liberté peut facilement être scindée en deux étapes : tout d'abord la contre-réaction  $S(q)/R(q)$ , qui est seule à déterminer les capacités de stabilisation et de rejet des perturbations, puis le préfiltre. Il faut noter cependant que les performances en asservissement dépendent elles aussi de la contre-réaction. Suivant les spécifications, il peut être difficile d'obtenir l'asservissement demandé sans modifier  $R(q)$  et  $S(q)$ .

Le placement de pôles multimodèle ne concerne que la contre-réaction, ce qui impose cette séparation en deux étapes. Par contre, l'optimisation multiobjective permet de tenir compte de toutes les spécifications simultanément. Le prix à payer est un espace d'optimisation de plus grande dimension, ce qui peut augmenter les problèmes dus aux minima locaux.

### 3.7 Optimisation séparée du préfiltre

L'optimisation multiobjective permet d'améliorer simultanément la contre-réaction et le préfiltre, au prix d'une certaine lourdeur des calculs et d'une description précise de tous les objectifs. Au cas où la contre-réaction obtenue par exemple par placement de pôles multimodèle donne satisfaction, on peut se contenter d'optimiser le préfiltre pour obtenir les performances désirées en asservissement.

La méthode que nous proposons consiste à minimiser l'écart entre les réponses indicielles et une réponse de référence. Des coefficients de pondération permettent de donner plus d'importance aux régions où la réponse s'écarte des spécifications, par exemple au dépassement maximum. Ils peuvent être ajustés automatiquement au cours d'une procédure itérative, vu la simplicité des calculs. L'optimisation porte sur l'ensemble des modèles et tient compte du signal de commande. Ce sont ces trois points qui la distinguent d'une méthode similaire proposée par [XM95].

La fonction-coût à minimiser vaut

$$J(T(q)) = \sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^{t_{\max}} [w_{y_k}(t)(y_k(t) - y_{\text{ref}}(t))^2 + w_{u_k}(t)u_k^2(t)] \quad (3.15)$$

où la sortie  $y_k(t)$  et l'entrée  $u_k(t)$  valent respectivement

$$y_k(t) = \frac{T(q)B(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}s(t)$$

$$u_k(t) = \frac{T(q)A(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}s(t)$$

Contrairement à (3.5), elle peut être résolue analytiquement. Elle n'est pas sans rappeler celle de certains régulateurs prédictifs [Soe92]. La différence essentielle est que l'optimisation porte ici uniquement sur le préfiltre qui agit en boucle ouverte, et que celui-ci est un filtre à réponse impulsionnelle finie. On évite ainsi tout risque d'instabilité, contrairement par exemple au régulateur GPC (Generalized Predictive Control). Le danger d'une inversion partielle de la dynamique du système, qui aurait de graves inconvénients en présence de zéros à non-minimum de phase, est évité si la fenêtre de temps n'est pas exagérément étroite, même si la pondération sur la commande est nulle.

Il est difficile de spécifier a priori les poids  $w_{y_k}(t)$  et  $w_{u_k}(t)$ . Nous suggérons de calculer un premier préfiltre avec  $w_{y_k}(t) = 1$  et  $w_{u_k}(t) = 0$ , de calculer les réponses, et au besoin d'ajuster les poids aux endroits où celles-ci s'écartent trop de la réponse de référence. Ces étapes sont résumées dans l'algorithme suivant :

- 1) Fixer  $w_{y_k}(t) \leftarrow 1$  et  $w_{u_k}(t) \leftarrow 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  et  $t = 1, \dots, t_{\max}$
- 2) Calculer un polynôme  $T(q)$  qui minimise (3.15)
- 3) S'arrêter si les réponses indicielles ont les caractéristiques demandées
- 4) Si le dépassement est trop grand, augmenter le poids  $w_{y_k}(t)$  des échantillons concernés
- 5) Si le temps de montée ou le temps d'établissement est trop faible, augmenter le poids  $w_{y_k}(t)$  des échantillons des modèles qui posent problème dans la région où ils sont trop éloignés de la réponse de référence
- 6) Augmenter le poids  $w_{y_k}(t)$  des échantillons inférieurs à 0 pour éviter un dépassement négatif

- 7) Augmenter le poids  $w_{uk}(t)$  des échantillons pour lesquels l'amplitude de la commande est trop grande
- 8) Itérer à partir du pas 2.

### 3.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons vu une méthode d'optimisation multimodèle qui vise à satisfaire des objectifs très variés, aussi bien dans le domaine harmonique que temporel. Le niveau de performances est décrit par un paramètre scalaire unique qui est minimisé. La solution n'est pas forcément Pareto-optimale ; un second problème d'optimisation permet d'y remédier.

Par rapport au placement de pôles multimodèle, l'utilisation directe des indices de performances que l'on veut améliorer permet d'automatiser la procédure d'optimisation. Plus besoin en effet d'identifier visuellement les pôles prédominants quant à leur effet sur telle ou telle réponse. Cela ne suffit pourtant pas pour en faire une méthode universelle ; les minima locaux rendent difficile l'obtention d'un bon régulateur à partir de zéro. L'optimisation multi-objective doit plutôt être considérée comme une dernière phase d'amélioration après qu'un régulateur proche des performances recherchées a été obtenu, par exemple par placement de pôles multimodèle.

Nous ne nous sommes pas attardé sur le choix de la méthode d'optimisation. Notre problème possède la particularité d'avoir une structure variable au cours de l'optimisation, ce qui rend difficile l'utilisation de méthodes de programmation quadratique où le hessien doit être estimé. Il vaut mieux utiliser une approche basée sur la descente de gradient.

Les objectifs considérés dans ce chapitre peuvent être étendus à d'autres critères, tels que l'erreur lors du suivi d'autres types de trajectoires ou la minimisation de l'amplitude de signaux internes du système. On peut par exemple éviter la saturation d'actionneurs.

# Chapitre 4

## Conception assistée par ordinateur

### 4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le placement de pôles multimodèle ne permet en général pas d'obtenir un régulateur adéquat en une seule itération. Les pôles doivent être déplacés de telle sorte que les critères de performances pris en compte soient progressivement améliorés. Cela peut difficilement s'automatiser ; en effet, un compromis acceptable doit être trouvé entre la rapidité du rejet des perturbations, la stabilité robuste et l'action sur la commande. Ainsi, un système interactif est souhaitable, pour autant que la synthèse soit raisonnablement facile et rapide.

C'est pour répondre à cet objectif que nous avons développé un programme de synthèse multimodèle interactive, nommé SysQuake. Par rapport aux logiciels existants, et notamment à Matlab qui est très utilisé dans le domaine de l'automatique, SysQuake offre l'avantage d'être suffisamment rapide pour faire immédiatement ressentir à l'utilisateur dans quel sens varient les grandeurs affichées lorsqu'il manipule un pôle ou un gain (Matlab 5 est environ dix fois plus lent pour l'affichage d'un lieu des pôles). Une fonction d'annulation lui permet de revenir en arrière au cas où il dégraderait tellement le régulateur qu'il ne pourrait plus retrouver son point de départ. Il faut aussi mentionner qu'au niveau de l'interface-utilisateur, malgré des améliorations dans les dernières versions, Matlab n'est pas vraiment conçu pour la manipulation directe de graphiques et n'autorise donc pas le même niveau d'interaction. SysQuake est écrit en langage C et ne dépend d'aucune bibliothèque de haut niveau. Il représente 15 700

lignes de code, ou 338 Ko, ou encore 210 Ko une fois compilé pour le PowerPC.

Ce chapitre se veut descriptif ; l'utilité des différents graphiques a été brièvement expliquée au chapitre 1, et le placement de pôles multimodèle a fait l'objet du chapitre 2. La section 4.2 décrit la structure et le fonctionnement du programme. L'affichage et l'édition des fonctions de transfert entre diverses grandeurs sont décrits à la section 4.3. Les différents graphiques et la façon dont ils peuvent être manipulés par l'utilisateur sont passés en revue dans les sections 4.4 pour les zéros et pôles dans le plan complexe, 4.5 pour les réponses temporelles, 4.6 pour les réponses harmoniques, et 4.7 pour le placement de pôles multimodèle. Les critères de stabilité et de performances donnés sous forme numérique sont décrits à la section 4.8, et les possibilités d'entrée-sortie et de transfert d'information avec d'autres programmes à la section 4.9. Le chapitre se termine par la conclusion.

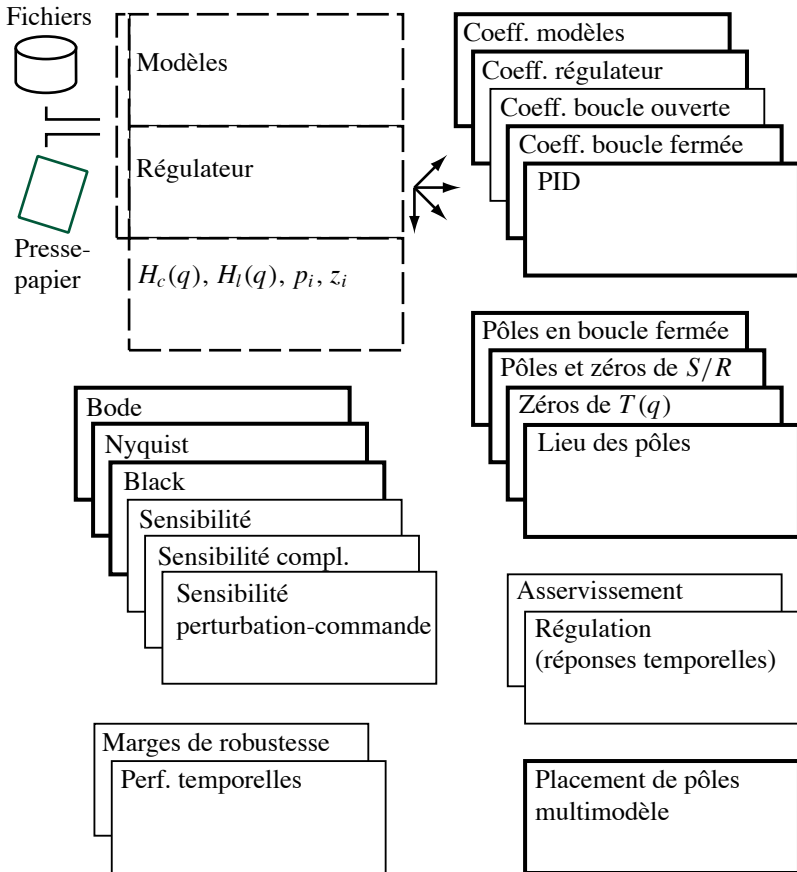
## 4.2 Structure du programme

Le programme SysQuake contient une représentation du système, modélisé par une ou plusieurs fonctions de transfert en  $z$ , et du régulateur RST, avec éventuellement des parties fixes  $R_f(z)$  et  $S_f(z)$ . L'utilisateur peut analyser les propriétés du système et de son régulateur à l'aide de multiples représentations graphiques et numériques, telles que les pôles en boucle fermée, les réponses indicielles ou le diagramme de Bode. Il peut également les modifier, soit en entrant des valeurs numériques, soit en manipulant directement les graphiques avec la souris. Chaque modification est immédiatement répercutée sur le régulateur, et toutes les données affichées sont mises à jour (cf. fig. 4.1).

Si le système est modélisé par plusieurs fonctions de transfert, chaque graphique contient plusieurs tracés (fig. 4.2). Les méthodes de synthèse classiques, telles que le placement de pôles, se basent sur le modèle sélectionné lorsque l'utilisateur fait glisser un élément du graphique avec la souris.

Certaines méthodes de synthèse nécessitent une forme particulière du régulateur. Par exemple, le placement de pôles standard impose des restrictions sur les degrés de  $R'$  et  $S'$ . Lorsqu'il ne remplit pas ces conditions, le régulateur est modifié dès que l'utilisateur tente d'utiliser la méthode de synthèse qui pose problème.

Chaque modification peut être annulée, ce qui permet à l'utilisateur de tenter des modifications sans craindre de perdre les performances atteintes jusque là.



**Figure 4.1**

Structure du programme SysQuake. Chaque rectangle en trait plein représente une fenêtre ; ceux en trait gras contiennent des éléments qui peuvent être manipulés par l'utilisateur. Les rectangles en traitillé représentent la valeur des modèles et du régulateur.

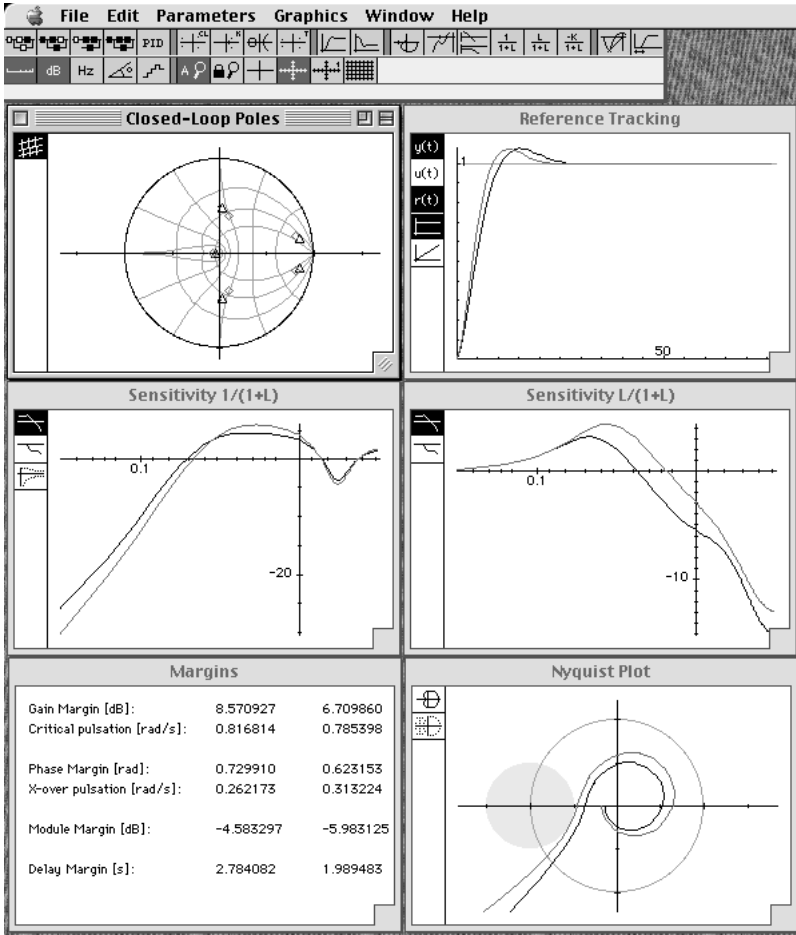


Figure 4.2 Copie d'écran de SysQuake.



**Tableau 4.1** Structure des régulateurs PID

Type	Degrés	Parties fixes	Coefficients
P	deg $R = 0$ deg $S = 0$	$R_f(q) = 1$ $S_f(q) = 1$	$k_p = s_0$
PI	deg $R = 1$ deg $S = 1$	$R_f(q) = q - 1$ $S_f(q) = 1$	$k_p = s_0$ $T_i = \frac{hs_0}{s_0 + s_1}$
PD	deg $R = 1$ deg $S = 1$	$R_f(q) = q$ $S_f(q) = 1$	$k_p = s_0 + s_1$ $T_d = -\frac{hs_1}{s_0 + s_1}$
PID	deg $R = 2$ deg $S = 2$	$R_f(q) = q^2 - q$ $S_f(q) = 1$	$k_p = s_0 - s_2$ $T_d = \frac{hs_2}{s_0 - s_2}$ $T_i = \frac{h(s_0 - s_2)}{s_0 + s_1 + s_2}$

### 4.3 Fonctions de transfert

Les coefficients des fonctions de transfert des modèles, des polynômes  $R(q)$ ,  $S(q)$  et  $T(q)$  du régulateur, ainsi que les parties fixes  $R_f(q)$  et  $S_f(q)$ , peuvent être spécifiés librement pour autant que toutes les fonctions de transfert apparaissant dans le système soient causales (ou strictement causales pour les modèles), et que ni les modèles ni le préfiltre  $T(q)$  n'aient un facteur dérivateur  $q - 1$ . Les fonctions de transfert en boucle ouverte  $BS/AR$  et en boucle fermée  $BT/(AR + BS)$  sont calculées en fonction des modèles et du régulateur, mais ne peuvent pas être changées directement.

Lorsque la structure du régulateur correspond à celle d'un PID numérique ou à l'une de ses variantes, le régulateur peut être représenté par la valeur du gain  $k_p$  et des temps d'intégration  $T_i$  et de dérivation  $T_d$  (voir tableau 4.1). Le PID numérique est défini par

$$K_{\text{PID}}(q) = k_p \left( 1 + \frac{h}{T_i} \cdot \frac{1}{q - 1} + \frac{T_d}{h} \cdot \frac{q - 1}{q} \right)$$

## 4.4 Zéros et pôles

On pourrait envisager l’affichage des pôles et des zéros des modèles, du régulateur et de nombreuses autres fonctions de transfert en boucle fermée. En pratique, comme les pôles en boucle fermée sont les mêmes quels que soient les signaux considérés, seul un nombre limité de fonctions de transfert présentent de l’intérêt.

Comme la représentation interne des fonctions de transfert se fait sous la forme de tableaux de coefficients, SysQuake doit calculer les zéros des polynômes. La méthode de Laguerre [PTVF92] est utilisée pour les premières racines. Elle a l’avantage d’être simple et rapide. Le polynôme est divisé par des termes réels, linéaires ou quadratiques, pour éviter d’obtenir des polynômes à coefficients complexes. Une fois qu’un polynôme de degré inférieur ou égal à trois est obtenu, les formules explicites sont utilisées.

En ce qui concerne les pôles et les zéros, SysQuake permet l’affichage de quatre graphiques, sans compter le placement de pôles multimodèle. Les *pôles en boucle fermées* donnent une bonne indication de la dynamique du système régulé. On peut y manipuler directement les pôles en les déplaçant avec la souris. Pour éviter d’obtenir un régulateur à coefficients complexes, SysQuake impose la symétrie des déplacements des paires de pôles complexes conjugués. S’il y a au moins deux pôles réels, un pôle réel peut être rendu complexe en éloignant suffisamment la souris de l’axe réel ; le pôle réel le plus proche devient son complexe conjugué. On peut spécifier des facteurs d’amortissements absolu et relatif qui sont affichés sur le graphique. Les *pôles et zéros de la contre-réaction* rendent possible la manipulation directe du régulateur. En choisissant les *zéros du préfiltre*, on peut simplifier des pôles en boucle fermée ou réduire l’effet des zéros du système régulé. Les pôles en boucle fermée sont aussi représentés.

Le *lieu des pôles* est une représentation des pôles en boucle fermée lorsque le gain du régulateur varie de zéro à l’infini. Les pôles en boucle fermée sont confondus avec ceux en boucle ouverte lorsque le gain est nul, et avec les zéros en boucle ouverte (ou rejetés à l’infini pour les pôles restants) lorsque le gain est infini. Les pôles et zéros en boucle ouverte proviennent soit du modèle, soit du régulateur. Dans SysQuake, l’utilisateur peut déplacer les pôles en boucle fermée sur les branches du lieu des pôles, ce qui correspond à un changement de gain du régulateur, ou déplacer les zéros ou les pôles du régulateur, ce qui change la forme du lieu. Dans le premier cas, au lieu de projeter la nouvelle position  $p^D$  désignée par l’utilisateur sur la branche la plus proche (ce qui serait particulièrement inefficace du point de vue du temps de calcul), le gain est

multiplié par  $\lambda = -\operatorname{Re}(A(p^D)R(p^D)/B(p^D)S(p^D))$ . La proposition suivante montre que s'il se trouve sur une branche,  $p^D$  devient un pôle du nouveau système en boucle fermée.

**Proposition 4.1** *Soient le système en boucle ouverte  $B(q)/A(q)$  et le régulateur  $S(q)/R(q)$ , et le lieu des pôles obtenus lorsque  $S(q)/R(q)$  est multiplié par un facteur réel. Si  $p^D$  appartient à ce lieu, il est un zéro de  $C^+(q) = A(q)R(q) + \lambda B(q)S(q)$ , où  $\lambda = -A(p^D)R(p^D)/B(p^D)S(p^D) \in \mathbb{R}$ .*

**Démonstration** Pour obtenir le pôle  $p^D$ , on multiplie le régulateur par le nombre  $\lambda$ . Le polynôme caractéristique devient alors  $C^+(q) = A(q)R(q) + \lambda B(q)S(q)$ . Il doit s'annuler pour  $q = p^D$  :  $A(p^D)R(p^D) + \lambda B(p^D)S(p^D) = 0$ , d'où  $\lambda = -A(p^D)R(p^D)/B(p^D)S(p^D)$ . Le nombre  $\lambda$  est réel si et seulement si le point  $p^D$  appartient au lieu des pôles ; celui-ci reste alors inchangé. ■

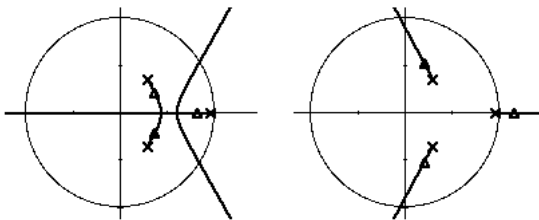
Notons que si  $p^D$  n'est pas sur le lieu des pôles, le fait de prendre la partie réelle de  $-A(p^D)R(p^D)/B(p^D)S(p^D)$  donne un nouveau lieu confondu avec l'ancien. Comme il n'y a aucune discontinuité entre  $p^D$  et  $\lambda$ , cette façon de faire permet de positionner facilement le pôle à l'endroit voulu en désignant avec la souris un endroit suffisamment proche d'une branche pour obtenir le résultat désiré.

Le lieu des pôles est généralement représenté pour des valeurs positives du gain du régulateur. Dans SysQuake, le déplacement d'un pôle sur une branche au-delà d'un pôle ou d'un zéro en boucle ouverte provoque l'inversion du lieu (fig. 4.3). Cela est cohérent avec le principe suivi par SysQuake selon lequel tout régulateur physiquement réalisable doit pouvoir être représenté. Un gain de régulateur négatif correspond généralement à un ralentissement du système, pour autant que la stabilité soit préservée.

## 4.5 Réponses temporelles

Les réponses temporelles sont sans doute la représentation la plus directe et la plus intuitive de la capacité du régulateur à suivre une consigne et à rejeter les perturbations. Contrairement aux réponses harmoniques, elles donnent également des renseignements sur le comportement transitoire des signaux.

SysQuake permet d'appliquer deux types de signaux, les sauts unité et les rampes, à deux endroits du système en boucle fermée, la consigne et la perturbation en sortie, et d'observer leurs effets sur deux grandeurs, l'entrée et la sortie



**Figure 4.3**

Inversion du lieu des pôles quand on fait glisser un pôle en boucle fermée sur une branche au-delà d'un pôle en boucle ouverte.

du système. Avec ces huit réponses possibles, on peut analyser le régulateur aussi bien en asservissement qu'en régulation. La grandeur à commander est importante, parce que c'est en général sur elle que portent la plupart des spécifications, telles que le temps de montée et le dépassement ; mais le signal de commande ne doit pas être négligé, car il peut entraîner des saturations au niveau de l'étage de puissance et de l'actionneur, et exciter des modes de résonance peu observables sur la sortie.

En utilisation normale, l'échelle est calculée automatiquement pour représenter la partie intéressante des réponses. En abscisse, la durée affichée est basée sur la position des pôles en boucle fermée. En ordonnée, l'échelle est telle que les signaux de plus grande amplitude couvrent toute la hauteur disponible. Pour identifier facilement les modifications quand on change le régulateur, on peut aussi verrouiller l'échelle.

En plus de l'aspect général des réponses, l'utilisateur peut obtenir des valeurs numériques en cliquant sur n'importe quel point du graphique. Il peut ainsi vérifier notamment les dépassements et les taux d'amortissement. Les indices de performances standard, tels que les dépassements maximaux ou les temps d'établissement, sont calculés automatiquement (voir ci-dessous).

## 4.6 Réponses harmoniques

Les réponses harmoniques (ou fréquentielles) peuvent se diviser en deux classes : les réponses en boucle ouverte et en boucle fermée. Elles fournissent

des indications sur la stabilité et sur la robustesse du système en boucle fermée. En outre, les réponses en boucle fermée reflètent les propriétés d'asservissement et de rejet de perturbations en fonction de la fréquence.

Le diagramme de Bode est une représentation de l'amplitude et de la phase du couple régulateur-système en boucle ouverte en fonction de la pulsation. Pour des systèmes simples, il permet de déterminer facilement les marges de phase et de gain et les pulsations correspondantes (pulsation de croisement et pulsation critique), et donc la bande passante du système en boucle fermée, à peu près égale à la pulsation de croisement.

Le diagramme de Nyquist est le lieu de la réponse harmonique dans le plan complexe. La pulsation n'apparaît pas explicitement. Le diagramme de Black (ou de Nichols) est une représentation logarithmique du diagramme de Nyquist. Les marges de gain et de phase sont clairement identifiables ; la marge de module peut être estimée dans le diagramme de Nyquist, où elle est égale à la distance entre la réponse harmonique et le point  $-1$ . L'abaque de Hall dans le diagramme de Nyquist et l'abaque de Nichols dans le diagramme de Black (lieux des points où le module ou l'argument de  $BS/(AR + BS)$  est constant) peuvent être affichées pour faciliter la synthèse.

Les autres propriétés que l'on peut analyser sont les gains à basse et à haute fréquence. A basse fréquence, le gain doit être suffisamment élevé pour garantir une erreur permanente (statisme) faible, voir nulle, et une faible sensibilité. A haute fréquence, le gain doit être suffisamment faible pour que des effets non modélisés ne risquent pas de déstabiliser le système, et pour que le bruit de mesure ne provoque pas d'excitation excessive au niveau de l'actionneur.

La synthèse d'un régulateur dans les diagrammes harmoniques en boucle ouverte (*loop shaping*) permet de tenir compte de ces contraintes. SysQuake n'est pas conçu pour cela, mais il donne la possibilité de changer le gain de contre-réaction en déplaçant verticalement le diagramme de Black ou l'amplitude du diagramme de Bode, ou en agrandissant ou réduisant le diagramme de Nyquist. Dans le diagramme de Nyquist, lorsque le numérateur du régulateur (polynôme  $S'(q)$ ) a deux paramètres, on peut déplacer arbitrairement n'importe quel point dans le plan complexe. Cela permet par exemple d'imposer la marge de phase d'un régulateur proportionnel-dérivateur (PD) ou proportionnel-intégrateur (PI).

En boucle fermée, SysQuake peut afficher la sensibilité  $\hat{S}(j\omega)$  (par rapport à laquelle est définie la marge de module), la sensibilité complémentaire  $\hat{T}(j\omega)$  et la sensibilité perturbation-entrée  $\hat{S}_{up}(j\omega)$ . L'importance de ces réponses pour la commande robuste a été expliquée au chapitre 1.

Des spécifications sur les valeurs maximales de la sensibilité et de la sensibilité perturbation–entrée peuvent être spécifiées ; elles sont représentées dans les graphiques de sensibilité, ainsi que dans le diagramme de Nyquist (disque autour du point  $-1$ ) et de Black (régions oblongues autour de  $-\pi - 2k\pi$ ).

Sur n'importe lequel de ces graphiques, on peut déterminer la valeur numérique à une fréquence donnée en cliquant dans un graphique avec la souris. La fréquence est affichée simultanément dans tous les diagrammes de réponses harmoniques au moyen d'une ligne verticale, et dans les graphiques des pôles et zéros au moyen de la courbe de fréquence naturelle correspondante. Ainsi, on peut agir à une fréquence donnée en manipulant les pôles correspondants.

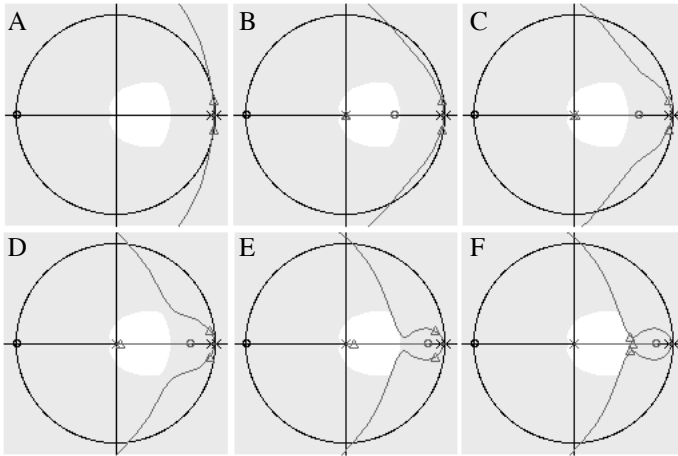
**Exemple 4.1** Pour illustrer l'utilisation de SysQuake pour la synthèse d'un régulateur, intéressons-nous à un système simple, un entraînement asservi en position. La synthèse est faite dans le lieu des pôles et la vérification des performances obtenues dans le diagramme de Nyquist pour les marges de gain et de phase, et sur la réponse indicielle pour les effets transitoires et permanents [Lon95, exemple 9.4]. La fonction de transfert du système échantillonné à  $h = 0,025$  s est

$$H(z) = \frac{10^{-3} (1,23z + 1,21)}{(z - 1)(z - 0,95)}$$

Le régulateur doit assurer un statisme nul, une traînée inférieure à 0,05, un amortissement absolu de 20 en 5 périodes d'échantillonnage, et un amortissement relatif de 535 par oscillation. Avec un régulateur proportionnel  $K(z) = 10,2$ , on obtient le lieu des pôles de la figure 4.4A. Les conditions d'amortissement ne peuvent être assurées pour aucun gain. On déforme le lieu des pôles en ajoutant un terme dérivateur au régulateur :

$$K(z) = k_p \frac{\left(1 + \frac{T_d}{h}\right) \left(z - \frac{T_d/h}{1+T_d/h}\right)}{z}$$

Les branches du lieu des pôles sont déformées en direction du zéro introduit par le terme dérivateur (fig. 4.4B–E). En déplaçant ce zéro, on observe la déformation de plus en plus accentuée, jusqu'au moment où les conditions d'amortissement peuvent être satisfaites. On peut alors fixer le gain (fig. 4.4F) et observer les marges de robustesse et les réponses temporelles. ■



**Figure 4.4**

Déformation du lieu des pôles. A : régulateur proportionnel ; la surface grisée correspond à la région qui ne satisfait pas aux conditions d'amortissement. B-E : régulateur proportionnel dérivateur, avec le zéro du terme dérivateur déplacé vers la droite. F : ajustement du gain par déplacement d'un pôle en boucle fermée dans la région qui assure l'amortissement désiré.

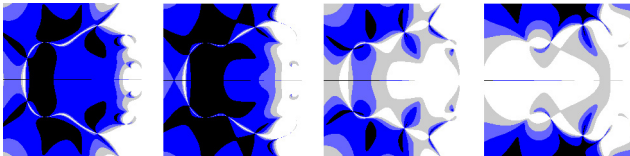
## 4.7 Placement de pôles multimodèle

La synthèse du régulateur par placement de pôles multimodèle (chapitre 2) se base sur la spécification des pôles désirés en boucle fermée et de leurs poids. Elle permet de déplacer les pôles et d'améliorer itérativement la robustesse et les performances.

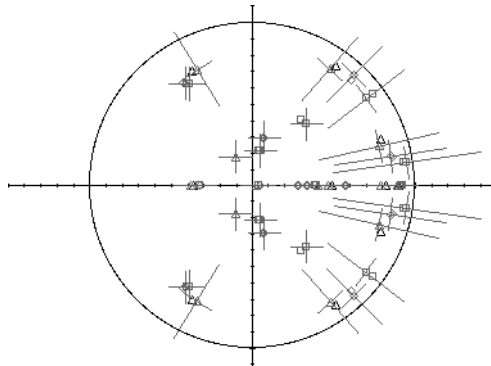
Dans SysQuake, les pôles effectifs, les pôles désirés et leurs poids sont affichés sur le même graphique (fig. 4.5). Les pôles désirés sont représentés par des croix dont les branches indiquent la direction  $\varphi_i$  et la valeur des poids  $w_i$  et  $w_i^\perp$ . Quand on part d'un régulateur initial  $x$ , les pôles désirés sont au même emplacement que les pôles effectifs et les poids sont tous égaux ; ainsi, la fonction-coût, nulle, atteint bien son minimum. L'utilisateur peut changer les poids et déplacer les pôles désirés, qui sont symétriques par rapport à l'axe réel pour assurer un régulateur à coefficients réels. Un nouveau régulateur  $x + \Delta x$  est

### Les limites de la synthèse interactive peuvent être repoussées !

A première vue, la lourdeur des calculs qu'entraînerait la prise en compte d'incertitudes continues constitue une raison supplémentaire de considérer un ensemble fini de modèles. Qu'en est-il réellement sur des ordinateurs récents ? Pour répondre à cette question, intéressons-nous au cas où les incertitudes sont bornées par un ellipsoïde dans l'espace des coefficients de la fonction de transfert du modèle [Bar94, HPB95]. Il est possible de calculer analytiquement le facteur  $\rho(p)$  par lequel l'ellipsoïde doit être multiplié pour que le polynôme caractéristique ait un zéro en un point  $p$  quelconque du plan complexe. Au lieu d'évaluer la fonction  $\rho(p)$  sur le pourtour du domaine de stabilité, ce qui permettrait de vérifier la stabilité robuste si le modèle nominal est stabilisé, nous la calculons pour tous les points de la portion de plan complexe considérée, par exemple un demi-carré de  $2,4 \times 2,4$  centré sur l'origine. Les valeurs inférieures à 1 correspondent aux pôles en boucle fermée de modèles situés à l'intérieur de l'ellipsoïde. Le temps de calcul dépend de la résolution et de l'ordre du système et du régulateur. Sur un Macintosh doté d'un microprocesseur PowerPC 604 à 150 MHz, une résolution de 0,01 (28 800 évaluations de  $\rho^2(p)$  en profitant de la symétrie) et un système et un régulateur d'ordre 6 permettent un temps de calcul de l'ordre de 0,25 s, suffisamment court pour envisager une synthèse interactive. Pour le montrer, choisissons une méthode très simple. Etant donné un modèle nominal, un ellipsoïde d'incertitudes et un régulateur, on peut faire correspondre à chaque point  $p$  du plan complexe le modèle qui possède un zéro en  $p$  et se trouve le plus proche du modèle nominal dans l'espace des incertitudes (une solution analytique existe). Le déplacement d'un point dans le plan des pôles se traduit par le calcul d'un nouveau régulateur par placement de pôles standard basé sur le modèle correspondant. L'affichage des pôles est mis à jour en conséquence. Le calcul des réponses temporelles et harmoniques sort du cadre de ce travail, mais il est intéressant de voir que l'augmentation de la puissance des ordinateurs permet des approches totalement nouvelles. Les graphiques ci-dessous correspondent au système décrit au chapitre 5.







**Figure 4.5** Graphique du placement de pôles multimodèle dans SysQuake.

calculé et les pôles effectifs (de même que tous les autres graphiques) sont mis à jour. Ainsi, on voit immédiatement l'effet du déplacement, et à quel point le pôle désiré entraîne le pôle réel correspondant. Lorsque celui-ci décroche parce que l'approximation linéaire du déplacement du pôle devient trop mauvaise, l'utilisateur a trois possibilités :

- il augmente le poids de certains pôles désirés ;
- il déplace de façon importante les pôles non dominants, qui ont une faible influence sur la position des pôles dominants, mais peuvent débloquer la situation ;
- il remplace le régulateur initial  $x$  par sa nouvelle valeur  $x + \Delta x$  et remplace tous les pôles désirés sur les pôles effectifs (une commande de SysQuake permet de le faire facilement), puis tente une nouvelle itération.

La manipulation des pôles désirés diffère de celle d'autres éléments en ceci qu'elle agit non pas sur le régulateur principal  $x$ , mais sur un régulateur auxiliaire  $x + \Delta x$ . La valeur de  $x$  est en effet nécessaire pour linéariser le déplacement des pôles en fonction du régulateur. L'utilisateur ne remarque pas cette différence ; s'il passe du placement de pôles multimodèle à une autre méthode de synthèse, le régulateur  $x$  prend instantanément la valeur de  $x + \Delta x$  et les différents graphiques ne changent pas.

## 4.8 Critères de performances

En plus de l'information essentiellement qualitative fournie par les graphiques, SysQuake peut également afficher des valeurs numériques pour certains indices de robustesse et de performances standard. Les grandeurs suivantes sont calculées pour tous les modèles :

- Marge de phase et pulsation de croisement
- Marge de gain et pulsation critique
- Marge de module
- Marge de retard
- Temps de montée (de zéro à un pourcentage quelconque)
- Temps d'amortissement (plus ou moins un pourcentage quelconque)
- Dépassement de la réponse indicielle
- Dépassement négatif de la réponse indicielle (effet non-minimum de phase)
- Temps d'amortissement d'un saut de perturbation en sortie
- Intégrale de la valeur absolue de l'erreur suite à un saut de perturbation en sortie (n'a de sens que si le système en boucle ouverte possède un intégrateur).

## 4.9 Entrées-sorties

Le rôle de SysQuake est complémentaire à celui d'autres logiciels de synthèse et d'analyse. Il est donc important que les données, et en premier lieu les coefficients des modèles et du régulateur, puissent être échangées dans un format commun. Un format compatible avec Matlab a été choisi.

SysQuake enregistre la description du système et du régulateur, ainsi qu'un certain nombre de critères de robustesse et de performances, sous forme de liste d'affectations dans un fichier texte. En faisant exécuter ce fichier par Matlab, on définit des variables qui peuvent être utilisées pour poursuivre l'analyse et la synthèse du régulateur. En lecture, SysQuake est aussi tolérant que possible :

seuls les coefficients des polynômes des modèles et du régulateur et la période d'échantillonnage sont lus, et l'absence de certaines valeurs est permise (par exemple, l'absence du polynôme  $T(q)$  est interprétée comme l'indication d'un régulateur à un degré de liberté  $K(q) = S(q)/R(q)$ ).

On peut aussi utiliser le presse-papier du Macintosh (commandes Copier et Coller) pour transférer les coefficients des modèles ou du régulateur entre SysQuake et Matlab.

En ce qui concerne les graphiques, on peut les copier sous forme d'images de type PICT (format graphique natif du Macintosh) ou les imprimer. La qualité n'est pas optimale, mais donne une image fidèle de la représentation à l'écran.

## 4.10 Conclusions

Le développement d'un programme de synthèse de régulateur assistée par ordinateur, SysQuake, a permis de valider l'approche du placement de pôles multimodèle interactif. La rapidité des ordinateurs personnels modernes permet de mettre à jour plusieurs fois par seconde des graphiques qui demandaient des heures de travail fastidieux il y a quelques années. L'interactivité apporte à l'ingénieur une compréhension intuitive de la relation entre les grandeurs de synthèse et les performances du régulateur. Le format des fichiers compatible avec Matlab facilite son intégration dans un ensemble plus large d'outils logiciels.

Un aspect secondaire en ce qui concerne ce travail, mais néanmoins important, est le côté éducatif de SysQuake. La manipulation directe des courbes et l'observation de l'effet des changements sur d'autres représentations du couple système-régulateur permet de comprendre intuitivement les relations entre le régulateur et les propriétés du système en boucle fermée. SysQuake est utilisé actuellement à l'Institut d'automatique lors de cours ex cathedra pour remplacer les graphiques statiques sur transparent, et lors de séances de travaux pratiques.

Enfin, il convient de préciser que ce chapitre décrit SysQuake tel qu'il a été implanté. Certains choix, notamment au niveau de l'interface-utilisateur, résultent d'un compromis entre ce qui semblait être la meilleure solution et le temps à disposition. Il faut donc considérer SysQuake comme un outil logiciel qui a montré son utilité, mais qui reste perfectible.



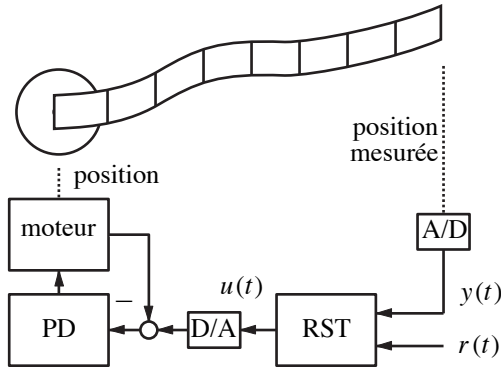
# Chapitre 5

## Exemple d'application

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons illustrer les méthodes de synthèse vues aux chapitres 2 et 3 en les appliquant à un système incertain, en exploitant le logiciel SysQuake développé au chapitre 4. Le système retenu est un bras souple se mouvant dans un plan horizontal autour d'un axe entraîné par un moteur électrique, le but étant de réguler la position de l'extrémité libre. Il a été conçu et réalisé par le Laboratoire d'automatique de Grenoble (INPG) et a fait l'objet d'un benchmark [LCRB96]. Le choix de ce système présente un certain nombre d'avantages :

- Le bras souple se prête particulièrement bien aux méthodes de synthèse proposées dans ce travail : le système est représenté par trois modèles échantillonnés, le régulateur doit être linéaire, SISO, et à deux degrés de liberté, et les spécifications sont nombreuses et diverses.
- Le bras souple est un système difficile à réguler : il possède trois modes de résonance mal amortis et de grandes variations paramétriques.
- Les spécifications nous sont imposées, ce qui exclut toute manipulation de notre part dans le but de rendre les résultats plus flatteurs.
- D'autres méthodes ont été utilisées et peuvent servir de points de comparaison.



**Figure 5.1** Bras souple vu de dessus.

La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Le système et ses modèles sont décrits dans la section 5.2. Les spécifications, reprises telles quelles du banc d'essai, sont exposées à la section 5.3. Les sections 5.4 et 5.5 sont l'application des deux méthodes de synthèse développées dans les chapitres précédents : la synthèse interactive par placement de pôles multimodèle d'une part, avec optimisation d'un préfiltre par approximation d'une réponse indicielle de référence, et l'optimisation multiobjective d'autre part. Les résultats sont comparés avec les autres solutions proposées pour le benchmark dans la section 5.6. Enfin, la section 5.7 contient quelques remarques en guise de conclusion.

## 5.2 Description du système

Le système utilisé pour l'application expérimentale des méthodes proposées dans ce travail est un bras souple tournant autour d'un axe vertical (cf. fig. 5.1). Le bras est constitué de deux lames d'aluminium reliées par des entretoises qui autorisent des mouvements dans le plan horizontal (l'influence de la gravité se limite aux défauts de construction). Il possède une infinité de modes d'oscillation, dont les six premiers sont mesurables. Le système peut être modifié par l'ajout d'une masse de 25 g ou 75 g à l'extrémité du bras, ce qui provoque notamment un déplacement des fréquences de résonance. L'arbre central est entraîné par

un moteur électrique à courant continu, et asservi en position par un régulateur fixe de type PD. La position de l'extrémité du bras, repérée par une diode infrarouge, est mesurée par une caméra. La mesure et la valeur de consigne pour le régulateur interne sont échantillonnés à 70 ms.

Le système est modélisé avec son régulateur interne par une fonction de transfert en  $z$ . L'identification est faite en boucle ouverte<sup>1</sup> avec une séquence binaire pseudo-aléatoire de 765 échantillons. Pour éviter la saturation de la sortie (limitée par l'angle de vision de la caméra de mesure) ou la destruction du système, on choisit une faible amplitude de commande.

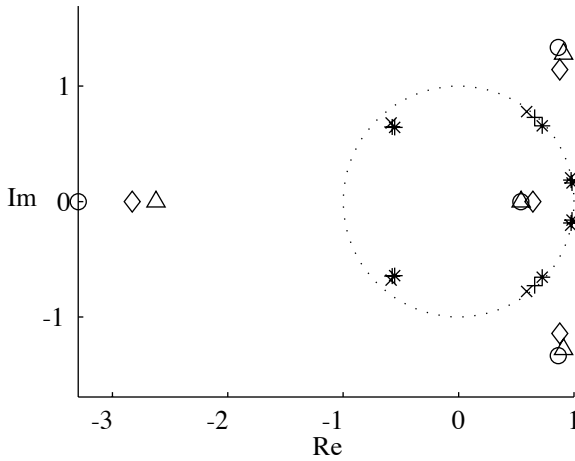
Les modèles identifiés pour les masses de 0 g, 25 g et 75 g sont respectivement

$$\begin{aligned}
 H_0(q) &= \frac{0,04235q^4 + 0,04359q^3 - 0,16986q^2 + 0,42575q - 0,19068}{q^6 - 1,95524q^5 + 1,38492q^4 - 0,57667q^3 + 0,81758q^2 - 1,3332q + 0,76063} \\
 H_{25}(q) &= \frac{0,03682q^4 + 0,00961q^3 - 0,10102q^2 + 0,28427q - 0,12933}{q^6 - 2,12025q^5 + 1,50938q^4 - 0,41965q^3 + 0,67078q^2 - 1,28873q + 0,71391} \\
 H_{75}(q) &= \frac{0,03531q^4 + 0,0152q^3 - 0,12648q^2 + 0,2731q - 0,13373}{q^6 - 2,30990q^5 + 1,73794q^4 - 0,46104q^3 + 0,72261q^2 - 1,33301q + 0,68082}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La figure 5.2 montre les pôles et les zéros en boucle ouverte. On constate la présence de zéros à non-minimum de phase, lesquels posent des problèmes aux méthodes de synthèse qui cherchent plus ou moins explicitement à inverser la dynamique du système. Les zéros réels supérieurs à 1 provoquent un comportement vicieux [EK91] qui ne peut pas être compensé par le régulateur [HMPL95], mais le bras n'en possède pas. On peut le vérifier sur les réponses indicielles de la figure 5.3. On constate également que le gain statique est différent de 1 et varie selon la charge, contrairement à ce que la description physique du système pouvait laisser croire. Cela est probablement dû aux imperfections mécaniques (et en particulier à un axe qui n'est pas rigoureusement vertical) qui font que le bras plie légèrement sous l'effet de son poids. Enfin, les oscillations très mal amorties laissent prévoir la difficulté d'un asservissement rapide et sans grand dépassement. La figure 5.4 montre les réponses harmoniques des trois modèles, avec leurs trois pics de résonance très mal amortis qui varient considérablement en fonction de la charge.

---

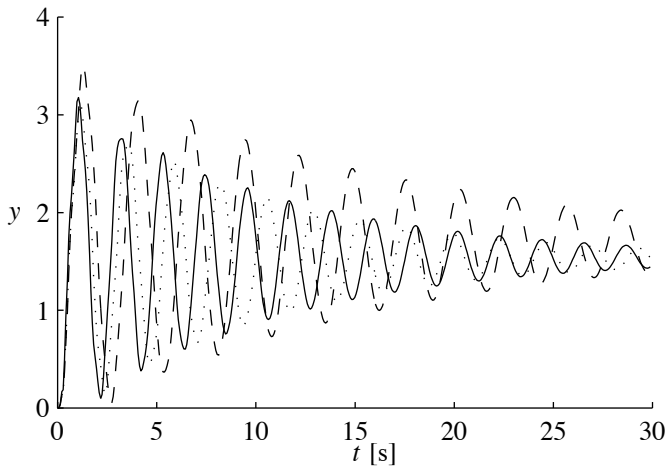
<sup>1</sup> Seul le régulateur PD est utilisé pendant l'identification. Dans ce qui suit, la boucle de contre-réaction considérée sera toujours la boucle extérieure.



**Figure 5.2**

Pôles et zéros du bras souple en boucle ouverte pour les trois modèles (pour les modèles à 0 g, 25 g et 75 g, les pôles sont représentés respectivement par  $\times$ ,  $+$  et  $*$ , et les zéros par  $\circ$ ,  $\Delta$  et  $\diamond$ ).



**Figure 5.3**

Réponses indicielles du bras souple en boucle ouverte pour les trois modèles (trait plein : 0 g, pointillé : 25 g, traitillé : 75 g).

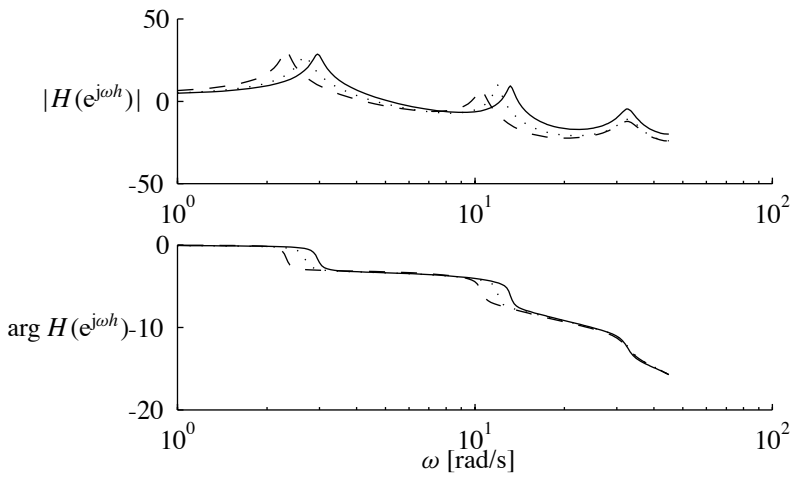
---

## 5.3 Spécifications

Les spécifications, toutes imposées par les auteurs du benchmark, concernent la structure du régulateur, la stabilité robuste, les performances robustes en régulation et les performances robustes en asservissement. Chacune d'entre elles doit être respectée pour les trois modèles en simulation. Le régulateur est ensuite essayé sur le système réel. Les coefficients des polynômes sont arrondis à 11 décimales.

### 5.3.1 Structure du régulateur

Le régulateur est de type RST à deux degrés de liberté, échantillonné à 70 ms, invariant dans le temps. Un intégrateur est imposé pour éviter tout statisme de régulation, et le gain statique en asservissement est unité.

**Figure 5.4**

Réponse harmonique du bras souple en boucle ouverte pour les trois modèles (trait plein : 0 g, pointillé : 25 g, traitillé : 75 g).

### 5.3.2 Stabilité et performances robustes en régulation

La *marge de module*, distance entre la réponse harmonique en boucle ouverte et le point critique  $-1$  dans le plan complexe, égale à l'inverse de la norme  $H_\infty$  de la sensibilité  $\hat{S}$ , doit être supérieure à 0,5, soit  $-6$  dB.

La *marge de retard*, retard minimum qui, ajouté à la boucle, rendrait le système instable, doit être supérieure à 70 ms. On évite ainsi l'instabilité même si le temps de calcul de la commande est lent par rapport à la période d'échantillonnage.

L'*amplitude de la sensibilité perturbation-entrée*  $\hat{S}_{up}$  doit être inférieure à 15 dB entre 0 et 80 % de la pulsation de Nyquist, et inférieure à 10 dB au-delà. On évite ainsi une excitation trop grande du système qui se traduirait par des ventres de grande amplitude au milieu du bras souple.

Le *temps d'établissement à 10 % de la perturbation* après un saut de perturbation doit être inférieur à 2,8 s.

L'*intégrale de la valeur absolue de l'erreur de sortie après un saut unité de perturbation* doit être inférieur à 1,5 s. Notons que cette intégrale est finie, parce que le statisme est nul.

### 5.3.3 Performances robustes en asservissement

Les trois critères de performances en asservissement concernent la sortie après un saut de consigne.

Le *temps de montée de 0 à 90 %* doit être inférieur à 1,8 s. Le *temps d'établissement à  $\pm 2$  %* doit être inférieur à 4,8 s. Le *dépassement maximum* doit être inférieur à 10 %.

### 5.3.4 Remarques

Avant même de chercher à synthétiser un régulateur, on peut observer que le problème est difficile. En se basant sur le temps d'établissement pour le rejet d'une perturbation, on obtient une bande passante pour la régulation d'environ 0,8 rad/s, soit près de trois fois moins que le premier pic de résonance ; or celui-ci varie fortement en fonction du modèle.

Notons également que le temps de montée, nettement plus faible que le temps d'établissement, peut favoriser les préfiltres au faible amortissement relatif. Le dépassement négatif n'est pas interdit, ce qui n'est pas grave car il impliquerait probablement des oscillations importantes ou un faible temps de montée. Enfin, aucune spécification ne limite le gain entre la consigne et la commande.

## 5.4 Placement de pôles multimodèle

La première méthode de synthèse que nous allons utiliser est le placement de pôles multimodèle développé au chapitre 2. Un régulateur initial est tout d'abord obtenu par placement de pôles standard, puis le placement de pôles multimodèle est utilisé pour obtenir de bonnes performances pour les trois modèles. Lorsque toutes les spécifications concernant la contre-réaction  $S(q)/R(q)$  sont remplies, le polynôme  $T(q)$  est optimisé pour obtenir le comportement désiré des réponses indicielles en asservissement.

### 5.4.1 Régulateur initial

Le régulateur initial doit remplir deux conditions : il doit avoir les mêmes parties fixes que le régulateur final (ou plus précisément ses pôles et zéros présélectionnés doivent contenir les parties fixes du régulateur final), et le degré de ses polynômes doit être fixé. Pour diminuer le nombre d'itérations lors de la synthèse multimodèle, il ne devrait pas être exagérément éloigné d'une solution acceptable. Un intégrateur est imposé par le cahier des charges ; choisissons donc

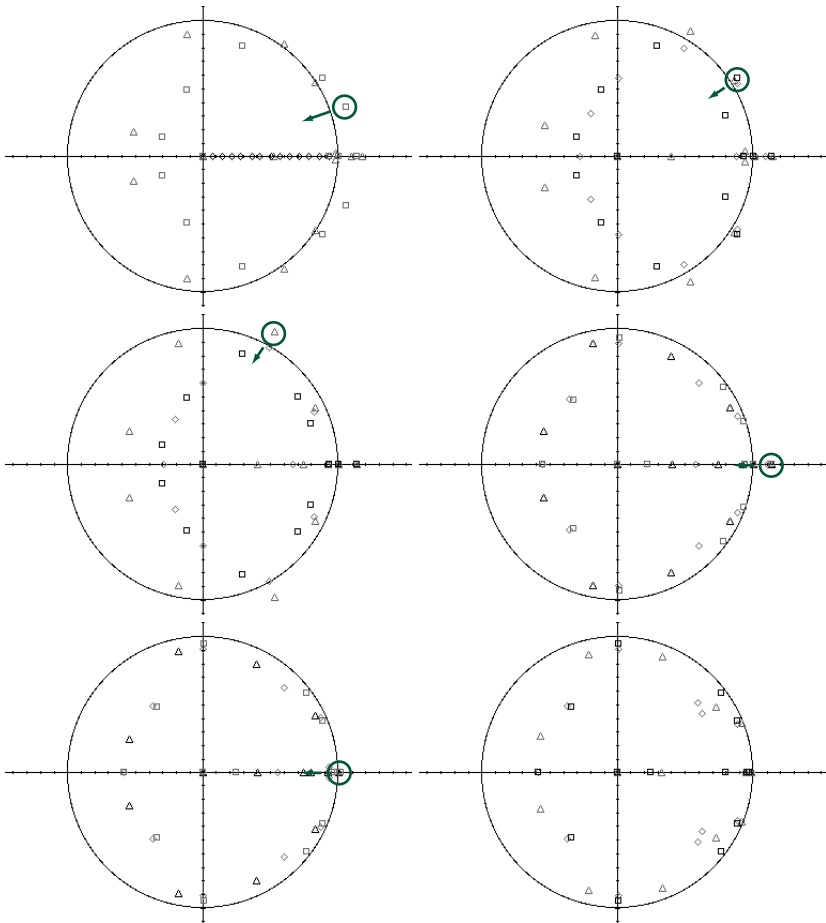
$$R_f(q) = q - 1$$

Une première tentative avec  $S_f(q) = 1$ ,  $\deg R' = 5$  et  $\deg S' = 6$ , degrés minimaux pour permettre de placer les pôles en boucle fermée associés à un modèle de façon arbitraire, n'a pas permis de remplir les spécifications de régulation ; choisissons  $\deg R' = 7$  et  $\deg S' = 6$ . Pour éviter un retard néfaste quant à la robustesse dans la contre-réaction, nous choisissons  $S_f(q) = q^2$ . Pour le placement de pôles multimodèle, qui permet le choix de n'importe quel régulateur causal, nous poserons  $S_f(q) = 1$  et  $S'(q) = S(q)$  pour profiter de tous les paramètres disponibles.

Nous répartissons d'abord les pôles du modèle intermédiaire uniformément sur l'axe réel en  $(i - 1)/\deg C$ ,  $i = 1, 2, \dots, \deg C$ . Les pôles correspondant aux deux autres modèles ne sont pas tous stables. SysQuake permet de les déplacer à l'intérieur du cercle unité en les faisant glisser avec la souris ; le modèle correspondant au pôle déplacé devient nominal (cf. fig. 5.5<sup>2</sup>). Les trois modèles sont stabilisés en quelques secondes.

---

<sup>2</sup>Il convient de préciser que le régulateur obtenu n'est pas exactement le même que celui utilisé pour la suite de cette section, bien que la méthode soit identique ; la synthèse interactive aboutit à des résultats toujours légèrement différents, mais l'expérience montre que les performances sont similaires.



**Figure 5.5**  
Déplacement des pôles en boucle fermée pour obtenir un régulateur qui stabilise les trois modèles.

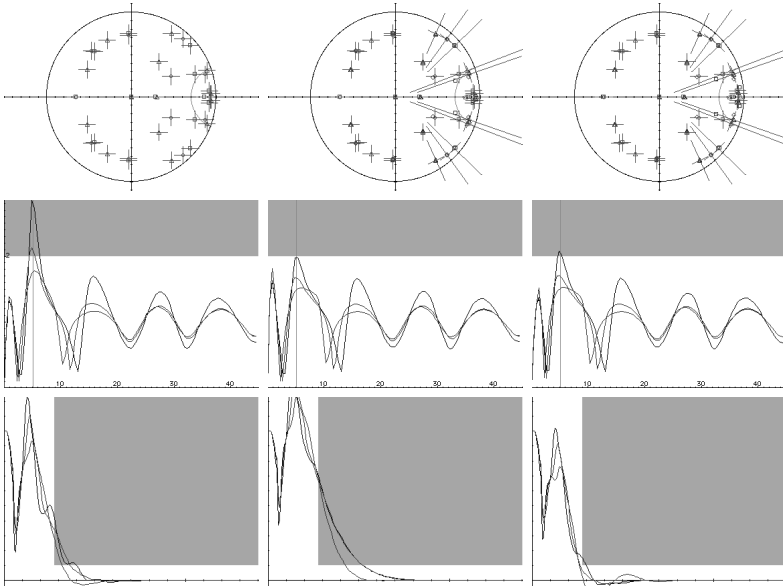
### 5.4.2 Synthèse interactive de la contre-réaction

Les performances obtenues avec le régulateur initial sont loin de remplir le cahier des charges. Il est en effet sans espoir de manipuler les pôles de l'un des modèles pour en augmenter les performances sans dégrader celles obtenues sur un autre modèle. Passons donc au placement de pôles multimodèle, dont le but est justement d'obtenir un compromis entre le déplacement de pôles de différents systèmes.

La synthèse est trop longue pour en détailler tous les pas, bien qu'elle se fasse sans peine avec SysQuake. Concentrons-nous sur l'un d'entre eux. On part d'un régulateur pour lequel on calcule les pôles en boucle fermée, les fonctions de sensibilité et la réponse à un saut indiciel de perturbation. Le but est de diminuer l'amplitude des pics de résonance de  $\hat{S}(e^{j\omega h})$  en-dessous de 6 dB, et d'obtenir le temps d'amortissement de la perturbation voulu. Les pics à la pulsation  $\omega$  correspondent à des pôles proches de  $e^{j\omega h}$  sur le cercle unité. On va donc agir essentiellement sur ces pôles en leur donnant une pondération importante. Quant au temps de rejet de perturbation, il est lié aux pôles dominants, qu'il s'agit aussi d'amortir le plus possible.

La figure 5.6 montre un pas d'amélioration interactive. On part d'une situation où un pic de résonance sort nettement des spécifications. SysQuake peut tracer la courbe de fréquence correspondante dans le plan des pôles en boucle fermée, ce qui permet d'identifier facilement la paire de pôles en cause. Pour réduire le pic, il faut les éloigner du cercle unité, tout en évitant de dégrader les performances des autres modèles ou d'amplifier la résonance à d'autres fréquences. Pour cela, on augmente la pondération des pôles mal amortis dans la direction radiale (un déplacement en fréquence ne dégraderait pas les performances au vu du cahier des charges) ; puis on déplace la paire de pôles désirés vers l'origine. L'ensemble des pôles se déplace. On obtient bien l'effet escompté (le pic de résonance est fortement réduit), mais simultanément on observe un net ralentissement du rejet de la perturbation, dû à un déplacement des pôles réels dominants vers la droite. On combat cet effet en augmentant le poids associé à ces pôles, et on obtient finalement un compromis acceptable. Quand on ne peut plus améliorer les performances en jouant avec les pondérations et l'emplacement des pôles désirés parce que l'approximation linéaire faite pour rendre la fonction-coût quadratique devient trop mauvaise, on replace tous les pôles désirés sur les pôles effectifs et on recommence une itération.

Un fois que les fonctions de sensibilité et le temps d'établissement pour le rejet de la perturbation est obtenu dans SysQuake, on peut exporter le régula-



**Figure 5.6**

Diminution d'un pic de la fonction de sensibilité tout en évitant le ralentissement du rejet de la perturbation par placement de pôles multimodèle. En haut, pôles en boucle fermée, pôles désirés et poids ; rangée du centre, amplitude de la sensibilité  $\hat{S}(e^{j\omega h})$  ; en bas, signal de sortie d'un saut indiciel de perturbation (les spécifications sur  $|\hat{S}|$  et sur le temps de rejet de perturbation sont représentées par les zones ombrées). A gauche, situation initiale où les pôles désirés sont confondus avec les pôles en boucle fermée et les poids sont tous identiques ; colonne du milieu, pondération importante des pôles correspondant à des pics de résonance, et déplacement vers le centre des pôles désirés les plus mal amortis ; à droite, pondération plus importante du pôle réel le plus mal amorti pour éviter un ralentissement excessif du système.

teur dans Matlab pour vérifier les autres points du cahier des charges, à savoir l'intégrale de l'erreur pour le rejet de la perturbation et la marge de retard. Dans ce cas, aucune retouche n'a été nécessaire. Pratiquement, la synthèse de la contre-réaction pour le bras souple a duré environ une heure.

### 5.4.3 Optimisation du préfiltre

Une fois que la partie contre-réaction du RST est synthétisée de telle sorte que les spécifications sur la régulation sont remplies, on peut déterminer le préfiltre  $T(q)$  pour tenter d'assurer le comportement désiré en asservissement. Si cette tâche s'avère impossible, il faut retoucher  $R(q)$  et  $S(q)$  qui influencent eux aussi l'asservissement.

Les spécifications sur l'asservissement comprennent le gain statique, le temps de montée, le temps d'établissement et le dépassement maximum pour les trois modèles (performances robustes). La méthode que nous proposons ici est de calculer les coefficients de  $T(q)$  de telle sorte que la somme de l'erreur quadratique entre la réponse indicielle associée aux trois modèles et une réponse de référence  $y_{\text{ref}}(t)$  soit aussi faible que possible (section 3.7). La fonction-coût suivante, linéaire par rapport aux coefficients de  $T(q)$ , est minimisée :

$$J(T(q)) = \sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^{50} [w_{yk}(t)(y_k(t) - y_{\text{ref}}(t))^2] \quad (5.2)$$

où la sortie  $y_k(t)$  vaut

$$y_k(t) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}s(t)$$

Les poids  $w_{yk}(t)$  sont choisis pour mettre l'accent sur les échantillons où les spécifications sont les plus critiques. La fenêtre de temps de 50 périodes d'échantillonnage est choisie assez large pour couvrir tous les transitoires et le temps d'amortissement désiré. L'algorithme suivant est utilisé :

- 1) Fixer  $w_{yk}(t) \leftarrow 1$  pour  $k = 1, 2, 3$  et  $t = 1, \dots, 50$
- 2) Calculer un polynôme  $T(q)$  qui minimise (5.2)
- 3) S'arrêter si les réponses indicelles sont satisfaisantes
- 4) Si le dépassement est supérieur à 10 %, augmenter le poids des échantillons supérieurs à 1,05



- 5) Augmenter le poids des échantillons inférieurs à 0 pour éviter un dépassement négatif
- 6) Si le temps de montée ou le temps d'établissement est supérieur aux valeurs demandées, augmenter le poids des échantillons des modèles qui posent problème entre  $t = 20$  et  $t = 30$
- 7) Itérer à partir du pas 2

Cet algorithme n'a pas tous les raffinements de celui décrit à la section 3.7, mais a l'avantage d'être d'une extrême simplicité et suffit pour les spécifications. La fenêtre de pondération pour obtenir le temps de montée voulu a été fixé une fois pour toutes entre  $t = 20h$  et  $30h$ . Seule la réponse de référence a fait l'objet de quelques tâtonnements. Finalement, on trouve celle qui donne les meilleurs résultats :

$$y_{\text{ref}}(t) = \frac{(1 - 0,76)(1 - 0,795)}{(q - 0,76)(q - 0,795)}s(t)$$

Notons que si l'on s'en tient strictement au cahier des charges, on obtient une réponse au temps de montée et au dépassement excellents avec une consigne en forme de saut indiciel,  $y_{\text{ref}}(t) = s(t)$  ; mais on observe des oscillations importantes dont l'enveloppe supérieure est proche de 1, et un signal de commande très agité.

## 5.4.4 Résultats

Le premier régulateur obtenu est

$$\begin{aligned}
 R_1(q) &= q^8 - 2,0622152274q^7 + 1,7085132392q^6 \\
 &\quad - 0,8565805107q^5 + 0,1704145328q^4 + 0,0668739956q^3 \\
 &\quad - 0,0281891384q^2 + 0,0012424044q - 5,92956 \cdot 10^{-5} \\
 S_1(q) &= 1,1725811844q^8 - 3,4836988059q^7 + 4,5602593075q^6 \\
 &\quad - 3,3463279465q^5 + 1,0230804907q^4 + 0,1982279163q^3 \\
 &\quad - 0,1115426339q^2 + 0,0003996736q - 0,0001086641 \\
 T_1(q) &= 0,50555469322q^8 - 0,8818344827q^7 + 0,27424047443q^6 \\
 &\quad - 0,39005184768q^5 + 2,1378620485q^4 - 3,2317146786q^3 \\
 &\quad + 2,1776982989q^2 - 0,60567300468q + 0,026789020565
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Toutes les spécifications sont remplies ; elles sont résumées dans le tableau 5.1. Les réponses harmoniques sont représentées dans la figure 5.7, et les réponses

**Tableau 5.1**

Performances obtenues par placement de pôles multimodèle (régulateur 1)

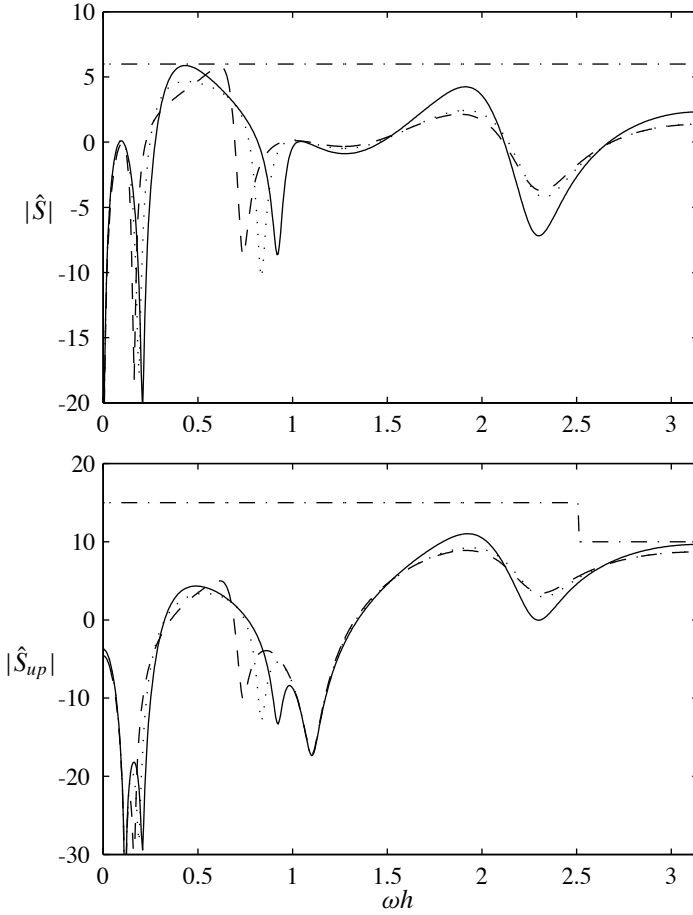
	Spécif.	0 g	25 g	75 g
Temps de montée [s]	< 1,8	1,75	1,61	1,12
Temps d'établissement $\pm 2\%$ [s]	< 4,8	2,73	2,94	4,69
Dépassement [%]	< 10	0,02	0	5,65
Rejet de perturbation $\pm 10\%$ [s]	< 2,8	2,45	2,38	2,52
Intégrale de l'erreur après un saut de $p(t)$ [s]	< 1,5	1,27	1,28	1,29
Marge de module [dB]	> -6	-5,88	-4,65	-5,83
Marge de retard [ms]	> 70	80,4	186,1	267,9
$\max_{\omega/\omega_N \in [0;0,8]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 15	11,03	9,22	8,88
$\max_{\omega/\omega_N \in [0,8;1]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 10	9,66	8,72	8,70

temporelles obtenues en simulation dans la figure 5.8. Enfin, les résultats expérimentaux font l'objet de la figure 5.9. Dans tous les graphiques de cette section, le modèle correspondant à l'absence de masse additionnelle est représenté par un trait plein, celui à une masse de 25 g par un trait pointillé, et celui à 75 g par un traitillé.

On constate une très forte agitation de la commande qui se traduit par une violente secousse sur la sortie. Les résultats expérimentaux montrent une oscillation à haute fréquence très mal amortie. De plus — ce qui ne se voit pas sur les graphiques —, le bras subit des déformations de forte amplitude. Ce problème est causé par la trop forte amplification des hautes fréquences et un système mal modélisé à haute fréquence pour ces amplitudes. Le système n'est en effet pas parfaitement linéaire, en raison notamment du frottement sec. L'amplitude des mouvements sur lesquels est basée l'identification des coefficients a donc une certaine importance.

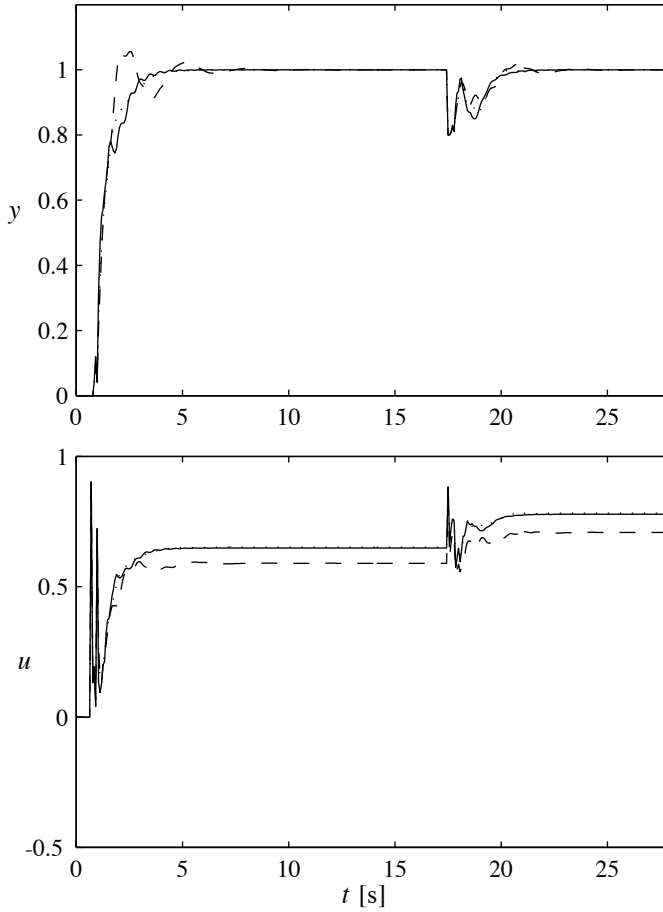
Il y a plusieurs façons de rendre les spécifications plus contraignantes pour éviter ce problème. Celle suggérée par les auteurs du benchmark consiste à réduire la borne sur l'amplitude de la sensibilité perturbation-entrée.

C'est ce que nous avons accompli lors de la synthèse d'un second régulateur. Pour ce faire, nous avons ajouté au polynôme de contre-réaction  $S(q)$  une partie fixe  $S_f(q) = q + 0,8$ , qui provoque un amortissement des hautes fréquences. Cette modification requiert des retouches mineures par placement de pôles

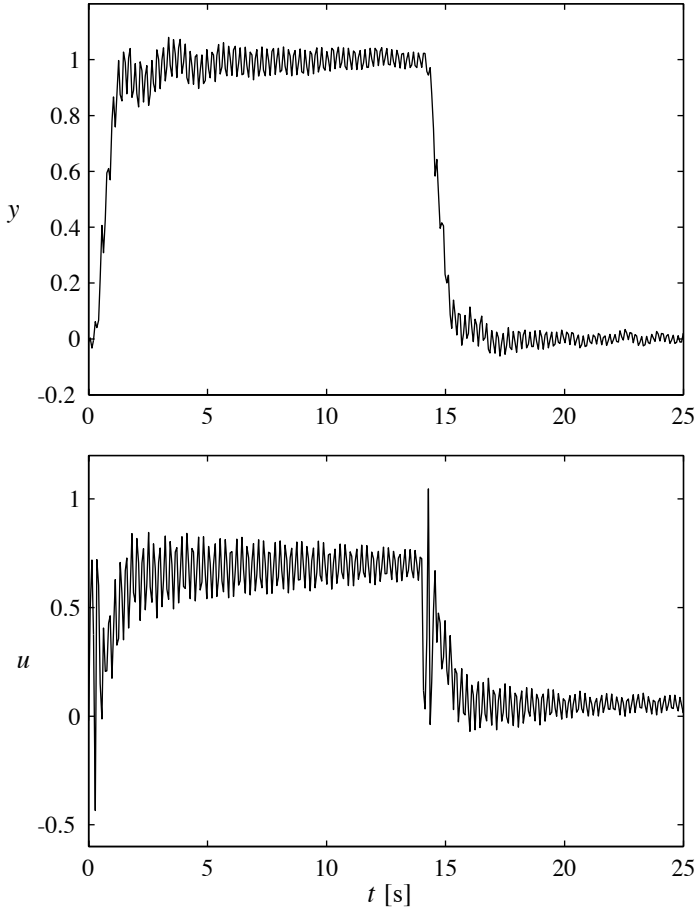


**Figure 5.7**

Sensibilité perturbations-sortie  $\hat{S}$  (haut) et sensibilité perturbation-commande  $\hat{S}_{up}$  (bas) pour les trois modèles et le premier régulateur. Les valeurs limites imposées par les spécifications sont représentées en trait mixte.

**Figure 5.8**

Sortie (haut) et commande (bas) pour les trois modèles et le premier régulateur. Un saut unité de consigne intervient à  $t = 10h = 0,7$  s et un saut de perturbation de  $-0,2$  à  $t = 250h = 17,5$  s.

**Figure 5.9**

Sortie (haut) et commande (bas) pour le bras muni d'une masse de 25 g et le premier régulateur (données expérimentales). La consigne est un signal carré entre 0 et 1 ; aucune perturbation délibérée n'est ajoutée.

**Tableau 5.2**

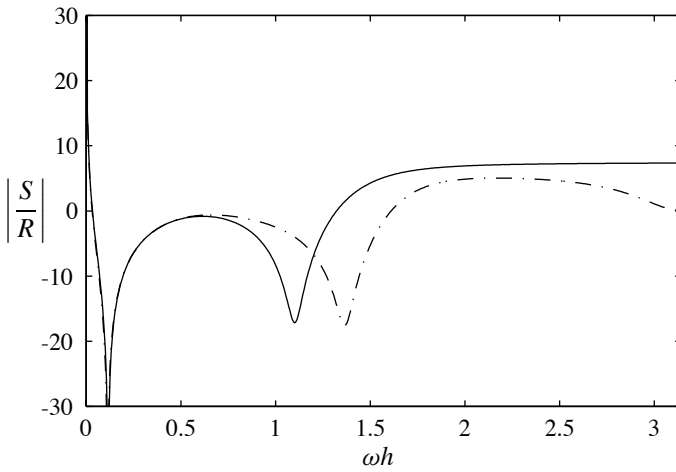
Performances obtenues par placement de pôles multimodèle (régulateur 2)

	Spécif.	0 g	25 g	75 g
Temps de montée [s]	< 1,8	1,68	1,68	1,19
Temps d'établissement $\pm 2\%$ [s]	< 4,8	2,73	2,73	4,69
Dépassement [%]	< 10	0	0	9,56
Rejet de perturbation $\pm 10\%$ [s]	< 2,8	2,66	2,52	2,52
Intégrale de l'erreur après un saut de $p(t)$ [s]	< 1,5	1,36	1,37	1,36
Marge de module [dB]	> -6	-5,99	-4,72	-5,86
Marge de retard [ms]	> 70	96,9	178,0	261,6
$\max_{\omega/\omega_N \in [0;0,8]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 15	7,98	6,64	6,35
$\max_{\omega/\omega_N \in [0,8;1]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 10	4,77	4,34	4,34

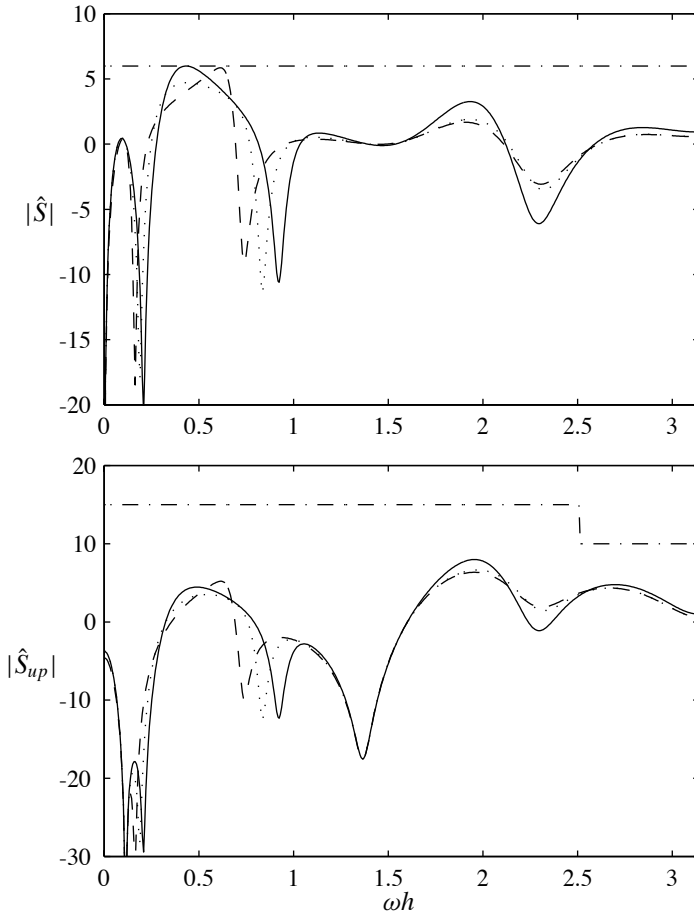
multimodèle, puis une nouvelle optimisation de  $T(q)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned}
 R_2(q) &= q^8 - 1,7869116721q^7 + 1,1208560956q^6 \\
 &\quad - 0,3536421681q^5 - 0,1523763837q^4 + 0,3392257542q^3 \\
 &\quad - 0,2208093532q^2 + 0,05321675q + 0,0004409775 \\
 S_2(q) &= 0,8939174463q^8 - 2,1431541309q^7 + 2,1538301112q^6 \\
 &\quad - 1,0919451051q^5 - 0,4948123825q^4 + 1,2737120039q^3 \\
 &\quad - 0,7853783997q^2 + 0,2077017152q + 0,0017705751 \\
 T_2(q) &= 0,61267203858q^8 - 1,2266122439q^7 + 0,93852458502q^6 \\
 &\quad - 0,49039398584q^5 + 0,11614713569q^4 + 0,24136045837q^3 \\
 &\quad - 0,46906705501q^2 + 0,4796200339q - 0,18660913322
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Là encore, le cahier des charges est rempli. Les nouvelles performances font l'objet du tableau 5.2. La figure 5.10 montre la diminution du gain du régulateur à haute fréquence ; l'ajout d'un zéro à haute fréquence dans  $S_f(q)$  a donc bien l'effet escompté. Les figures 5.11 et 5.12 montrent les résultats de simulation, et la figure 5.13 les résultats expérimentaux. On constate bien une diminution importante du module de la fonction de transfert entre la perturbation et la commande. Cela se reflète non seulement sur le rejet de la perturbation, mais aussi sur la commande nécessaire pour suivre un saut de consigne. Le revers de la médaille est un rejet de perturbation légèrement plus lent, et surtout une

**Figure 5.10**

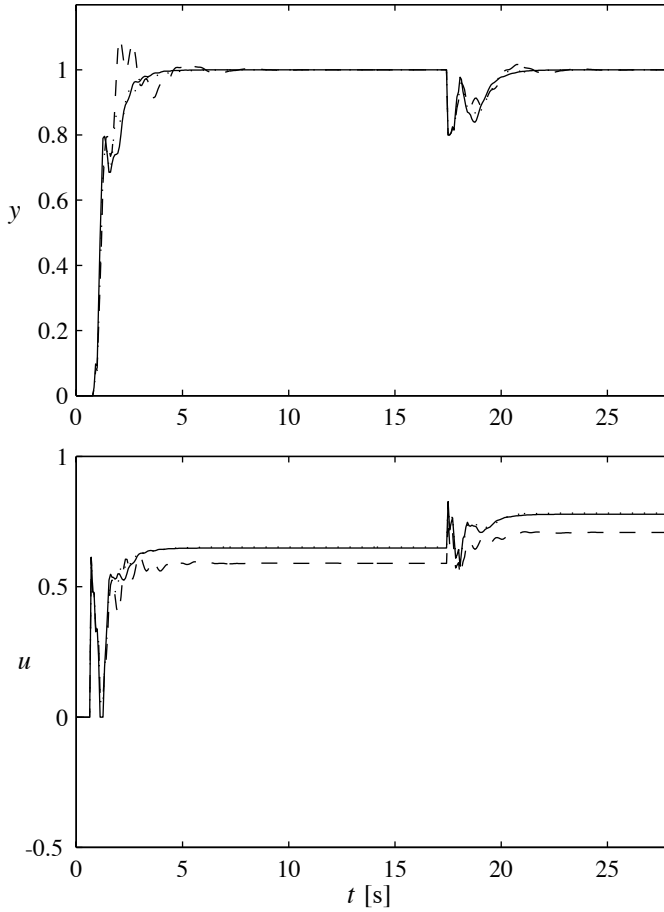
Gain de la contre-réaction  $\left| S(e^{j\omega h})/R(e^{j\omega h}) \right|$  pour le premier régulateur (trait plein) et le second (trait mixte).



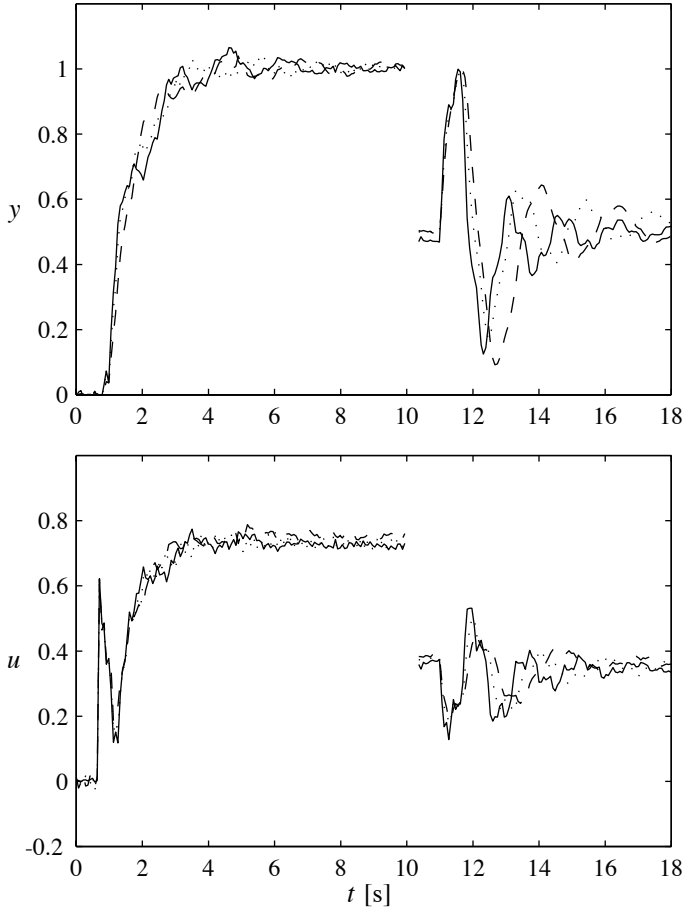
**Figure 5.11**

Sensibilité perturbations-sortie  $\hat{S}$  (haut) et sensibilité perturbation-commande  $\hat{S}_{up}$  (bas) pour les trois modèles et le second régulateur. Les valeurs limites imposées par les spécifications sont représentées en trait mixte.



**Figure 5.12**

Sortie (haut) et commande (bas) pour les trois modèles et le second régulateur. Un saut unité de consigne intervient à  $t = 10h = 0,7$  s et un saut de perturbation de  $-0,2$  à  $t = 250h = 17,5$  s.



**Figure 5.13**

Sortie (haut) et commande (bas) pour les trois systèmes et le second régulateur (données expérimentales). A gauche, saut de consigne ; à droite, choc à l'extrémité du bras (graphique normalisé pour avoir la même amplitude en sortie pour les trois systèmes).

nette augmentation du dépassement, qui passe de 5,6 % à 9,6 %. Ceci est dû au ralentissement de la régulation ; pour obtenir le temps de montée requis, qui est très difficile à atteindre, il faut rendre le filtre de consigne  $T(q)$  plus rapide, ce qui augmente le dépassement.

Bien que les résultats expérimentaux diffèrent légèrement des simulations, surtout le temps de montée maximum qui est d'environ 2,1 s, il faut remarquer que les spécifications de robustesse très contraignantes permettent tout de même d'avoir d'excellents résultats. La réponse reste très rapide malgré un système mal amorti et aux incertitudes importantes.

## 5.5 Optimisation multiobjective

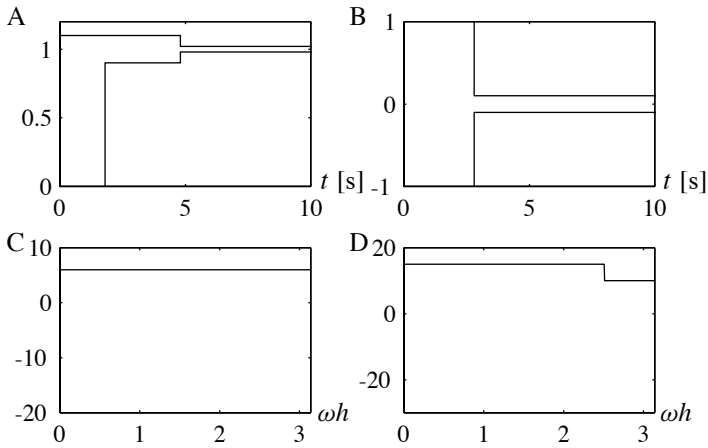
Tentons maintenant de trouver un régulateur pour le même système et les mêmes spécifications avec l'approche par optimisation multiobjective présentée au chapitre 3. Dans un premier temps, nous voulons améliorer les performances du deuxième régulateur. Ainsi, même si l'optimisation est piégée par un minimum local, nous avons l'assurance de respecter le cahier des charges avec de meilleures performances. Ensuite, en fonction des résultats, nous choisirons des spécifications plus sévères pour obtenir un régulateur mieux adapté au système réel.

### 5.5.1 Synthèse du régulateur

Pour simplifier le calcul du gradient des critères de robustesse et de performances, nous choisissons pour objectifs ceux qui peuvent s'exprimer comme des bornes sur les réponses harmoniques et temporelles. Nous ne tenons compte ni de l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur après un saut de perturbation, ni de la marge de retard. Nous verrons que ces deux contraintes sont de toutes façons respectées par les solutions obtenues. Pour les raisons exposées à la page 46, nous remplaçons le temps de montée maximum par un temps d'établissement supplémentaire à 10 % de 1,8 s, qui est une condition plus sévère. Les limites  $\beta(\Omega)$  (identiques pour les trois modèles) sont représentées à la figure 5.14.

Pour l'optimisation, nous utilisons la commande Matlab `constr` pour résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \underset{\chi, x}{\text{minimiser}} & \chi \\ \text{sous contraintes} & \frac{\alpha(\Omega, x) - \bar{\beta}(\Omega)}{\beta(\Omega) - \bar{\beta}(\Omega)} - \chi \leq 0, \quad \forall \Omega \end{array}$$



**Figure 5.14**

Spécifications sur la sortie suite à un saut indiciel de consigne (A) ou de perturbation (B), et sur le module de la sensibilité perturbation-sortie (C) ou perturbation-commande (D).

L'algorithme utilisé par `constr`, basé sur la programmation quadratique séquentielle (SQP), effectue une mise à jour récurrente du hessien [Gra92]. Comme elles sont basées sur les maxima locaux de  $(\alpha(\Omega, x) - \bar{\beta}(\Omega)) / (\beta(\Omega) - \bar{\beta}(\Omega))$ , nos contraintes peuvent changer de façon discontinue au cours de l'optimisation. Il vaudrait sans doute la peine d'envisager des méthodes mieux adaptées, telles que la programmation linéaire séquentielle (SLP) où seuls les gradients sont utilisés. Mais du moment que l'optimisation converge, la solution obtenue ne changerait vraisemblablement pas.

Nous prendrons comme régulateur initial la solution (5.4) obtenue par placement de pôles multimodèle, avec  $S'(q) = S(q)$  et  $S_f(q) = 1$  pour tirer pleinement parti de tous les paramètres du RST.

**Tableau 5.3** Performances obtenues par optimisation multiobjective (régulateur 3)

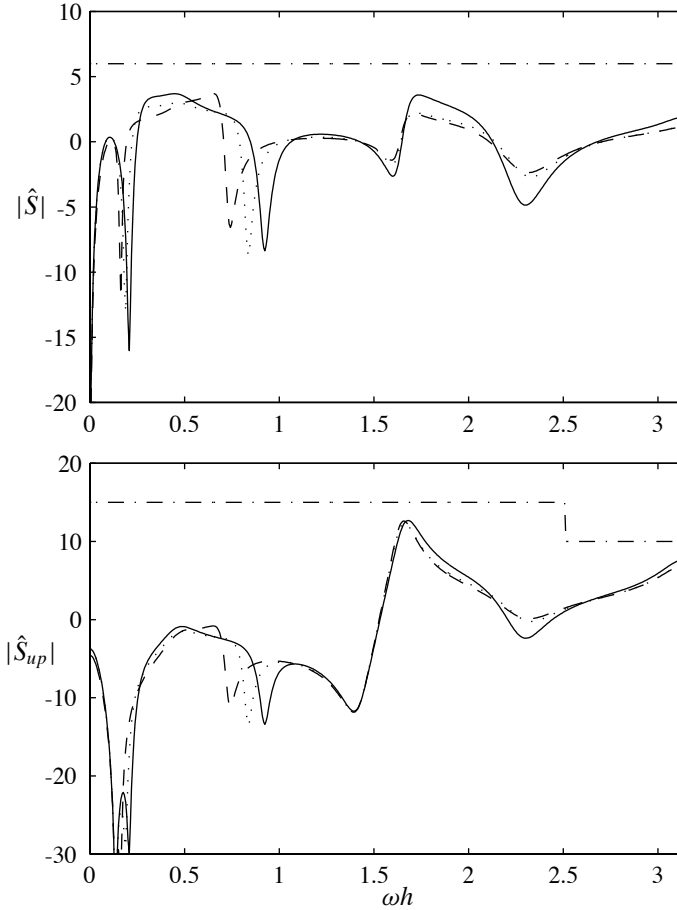
	Spécif.	0 g	25 g	75 g
Temps de montée [s]	< 1,8	0,56	0,63	0,63
Temps d'établissement $\pm 2\%$ [s]	< 4,8	4,27	4,06	4,69
Dépassement [%]	< 10	7,66	5,11	3,22
Rejet de perturbation $\pm 10\%$ [s]	< 2,8	2,24	2,38	2,45
Intégrale de l'erreur après un saut de $p(t)$ [s]	< 1,5	1,30	1,35	1,37
Marge de module [dB]	> -6	-3,69	-2,99	-3,70
Marge de retard [ms]	> 70	181,4	217,3	316,9
$\max_{\omega/\omega_N \in [0;0,8]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 15	12,68	12,34	12,60
$\max_{\omega/\omega_N \in [0,8;1]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 10	7,68	6,93	6,91

## 5.5.2 Résultats

Le premier régulateur obtenu par optimisation multiobjective est

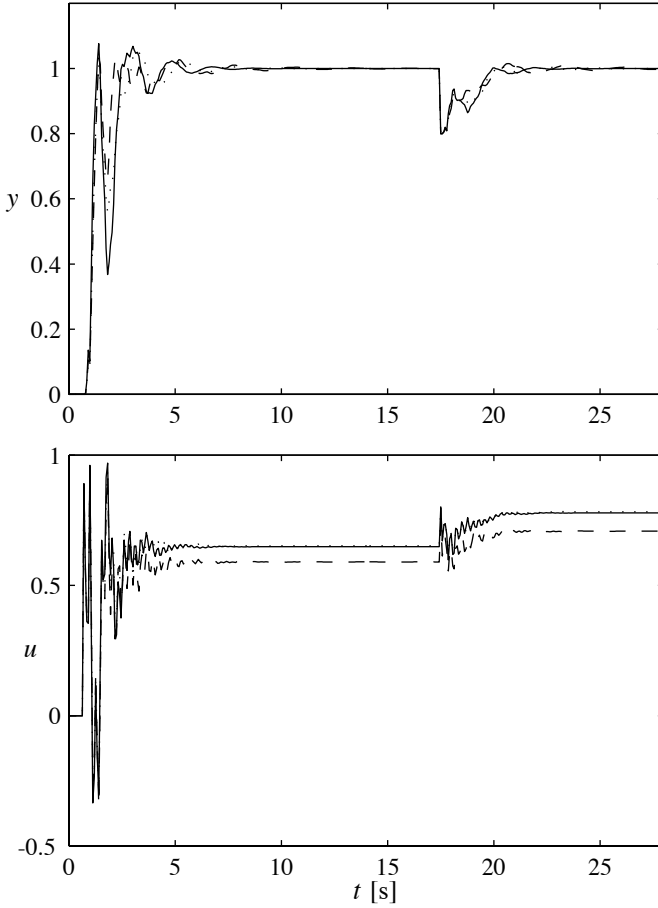
$$\begin{aligned}
 R_3(q) &= q^8 - 1,972120209q^7 + 1,1794687307q^6 \\
 &\quad - 0,17548291314q^5 - 0,53235147955q^4 + 1,2704722794q^3 \\
 &\quad - 0,8505911013q^2 - 0,079912405528q + 0,16051709841 \\
 S_3(q) &= 0,74497240924q^8 - 2,1013452854q^7 + 2,4482756116q^6 \\
 &\quad - 1,4514802002q^5 - 0,30531263554q^4 + 1,6074630234q^3 \\
 &\quad - 1,1541072404q^2 + 0,086650934695q + 0,13539565967 \\
 T_3(q) &= 0,88994497095q^8 - 2,0930718952q^7 + 1,5540587932q^6 \\
 &\quad - 0,19317147517q^5 - 0,15667637589q^4 - 0,01528227978q^3 \\
 &\quad - 0,42861377659q^2 + 0,84300870792q - 0,38968439251
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

L'indice de performances multiobjectif  $\chi$  est passé de 0,9986 (pour le régulateur initial obtenu par placement de pôles multimodèle) à 0,7660 en une dizaine de minutes sur un PowerMac 8500 muni d'un microprocesseur PowerPC 604e à 200 MHz. Les critères de performances obtenus sont résumés dans le tableau 5.3. Le gain de performances est important, même s'il correspond aux bornes sur les réponses harmoniques et temporelles et non pas directement aux spécifications. Le module des fonctions de sensibilité  $\hat{S}(e^{j\omega h})$  et  $\hat{S}_{up}(e^{j\omega h})$  sont tracés à la figure 5.15 et les réponses temporelles à des sauts de consigne et de perturbation à la figure 5.16.



**Figure 5.15**

Sensibilité perturbations-sortie  $\hat{S}$  (haut) et sensibilité perturbation-commande  $\hat{S}_{up}$  (bas) pour les trois modèles et le troisième régulateur. Les valeurs limites imposées par les spécifications sont représentées en trait mixte.



**Figure 5.16**

Sortie (haut) et commande (bas) pour les trois modèles et le troisième régulateur. Un saut unité de consigne intervient à  $t = 10h = 0,7$  s et un saut de perturbation de  $-0,2$  à  $t = 250h = 17,5$  s.

Nous constatons que la commande est très agitée, bien qu'elle soit conforme aux spécifications du benchmark. Sur le système réel, cela entraînerait de violentes oscillations du bras. Pour diminuer cet effet, nous pouvons modifier les objectifs et tenter une nouvelle optimisation. Nous devons considérer simultanément le comportement en régulation et en asservissement. En effet, on voit clairement que la perturbation provoque aussi des oscillations à fréquence élevée. Mais en agissant seulement sur la contre-réaction  $S(q)/R(q)$ , on risque de provoquer une inversion partielle de la dynamique en boucle fermée par l'intermédiaire du préfiltre  $T(q)$ . Les spécifications sont donc modifiées de la manière suivante :

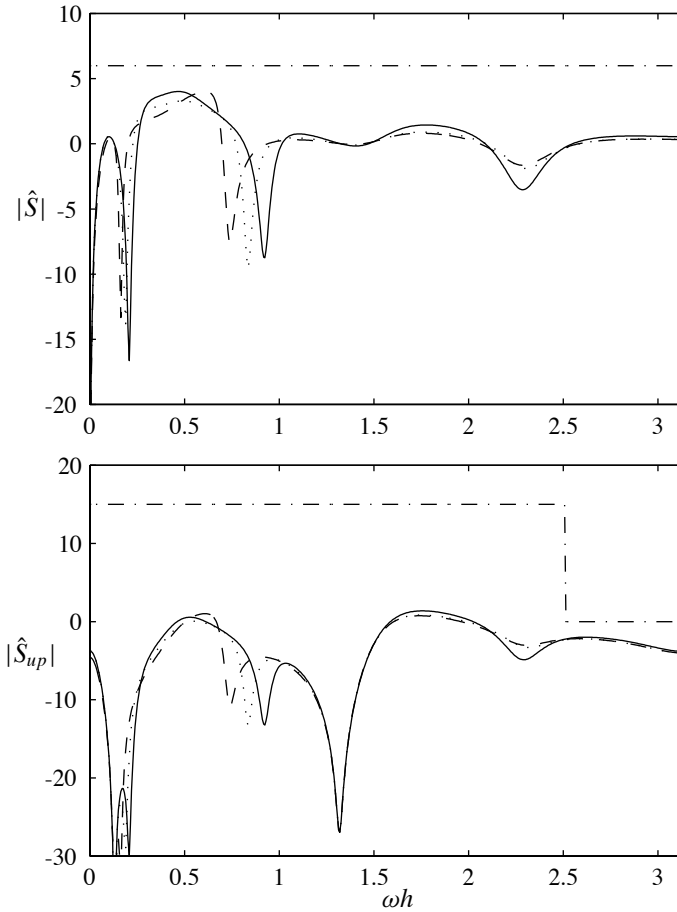
- le module de la fonction de sensibilité perturbation-commande  $\hat{S}_{up}(e^{j\omega h})$  doit être inférieur à 0 dB au-delà de 80 % de la pulsation de Nyquist (au lieu de 10 dB) ;
- le module de la fonction de sensibilité consigne-commande doit être inférieur à 10 dB au-dessous de 40 % de la pulsation de Nyquist, et inférieur à  $10(\omega - \omega_N)/\omega_N$  dB (entre 6 dB et 0 dB) au-delà (il n'était pas limité par les spécifications du benchmark).

Nous obtenons le régulateur suivant :

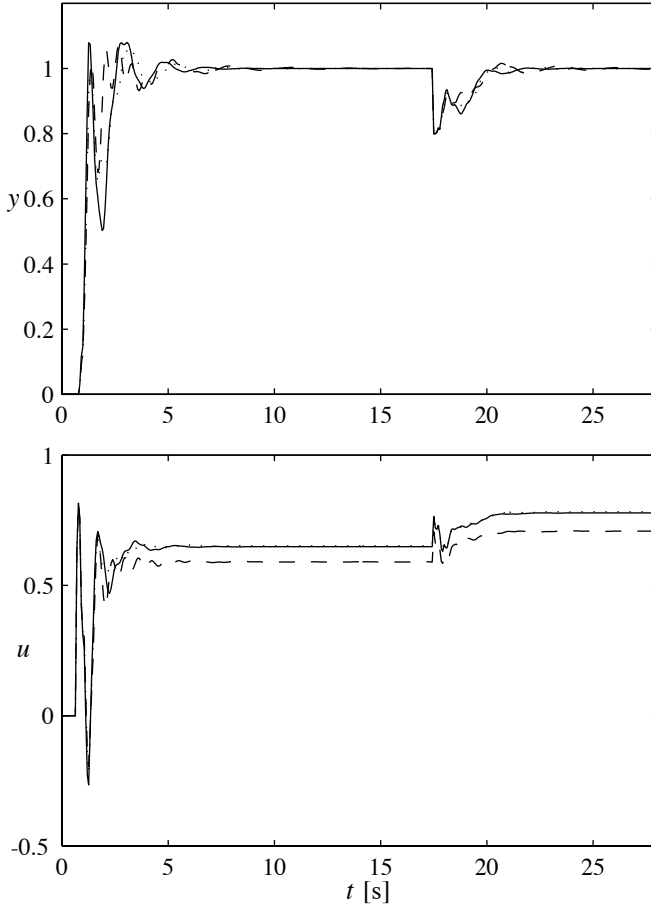
$$\begin{aligned}
 R_4(q) &= q^8 - 2,50361988q^7 + 2,3401965466q^6 \\
 &\quad - 0,93056996853q^5 - 0,29481263554q^4 + 0,87554754998q^3 \\
 &\quad - 0,62878621734q^2 + 0,1097281661q + 0,032316438733 \\
 S_4(q) &= 0,57924557246q^8 - 1,6707972096q^7 + 1,8972548529q^6 \\
 &\quad - 0,92106519893q^5 - 0,44214976496q^4 + 1,1142463373q^3 \\
 &\quad - 0,62638737161q^2 - 0,0018871350075q + 0,076980726124 \\
 T_4(q) &= 0,63851728646q^8 - 1,421247804q^7 + 1,005457007q^6 \\
 &\quad - 0,35833960573q^5 + 0,15682210458q^4 + 0,20815539661q^3 \\
 &\quad - 0,50957122162q^2 + 0,45349869708q - 0,16785105174
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'indice de performances multiobjectif correspondant vaut 0,7961. Les performances obtenues sont données dans le tableau 5.4 et les réponses harmoniques et temporelles dans les figures 5.17 et 5.18. Enfin, la figure 5.19 montre le module de la réponse harmonique consigne-commande pour les régulateurs 2 et 4. Ces régulateurs ont tous deux pour but de réduire l'effort au niveau de l'actionneur ; c'est pourquoi il est intéressant de comparer celui obtenu par placement de pôles et optimisation du préfiltre d'une part, et celui résultant de l'optimisation multiobjective d'autre part. Comme la réduction du module de

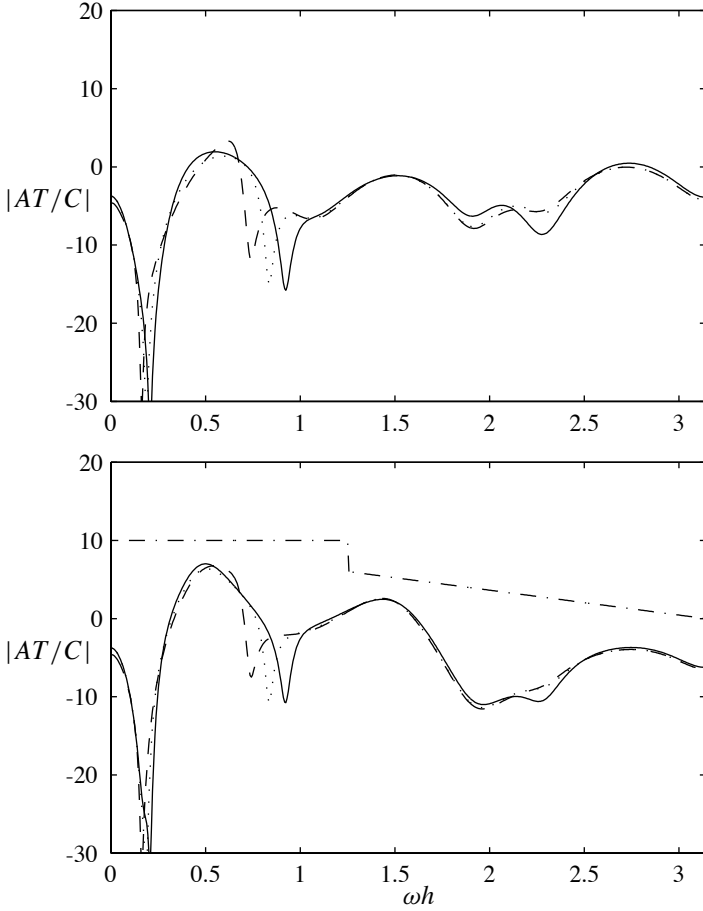


**Figure 5.17**

Sensibilité perturbations-sortie  $\hat{S}$  (haut) et sensibilité perturbation-commande  $\hat{S}_{up}$  (bas) pour les trois modèles et le quatrième régulateur. Les valeurs limites imposées par les spécifications sont représentées en trait mixte.

**Figure 5.18**

Sortie (haut) et commande (bas) pour les trois modèles et le quatrième régulateur. Un saut unité de consigne intervient à  $t = 10h = 0,7$  s et un saut de perturbation de  $-0,2$  à  $t = 250h = 17,5$  s.



**Figure 5.19**

Module de la réponse harmonique consigne-commande pour les trois modèles et le deuxième (haut) et quatrième régulateur (bas). La borne supérieure, représentée en trait mixte, est imposée pour le quatrième régulateur.

**Tableau 5.4** Performances obtenues par optimisation multiobjective (régulateur 4)

	Spécif.	0 g	25 g	75 g
Temps de montée [s]	< 1,8	0,56	0,56	0,63
Temps d'établissement $\pm 2\%$ [s]	< 4,8	3,57	3,99	4,69
Dépassement [%]	< 10	7,96	5,93	7,24
Rejet de perturbation $\pm 10\%$ [s]	< 2,8	2,31	2,45	2,52
Intégrale de l'erreur après un saut de $p(t)$ [s]	< 1,5	1,36	1,40	1,43
Marge de module [dB]	> -6	-4,02	-3,29	-4,01
Marge de retard [ms]	> 70	155,3	189,5	281,2
$\max_{\omega/\omega_N \in [0;0,8]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 15	1,37	0,83	1,02
$\max_{\omega/\omega_N \in [0,8;1]}  \hat{S}_{up} $ [dB]	< 0	-1,99	-2,20	-2,18

la réponse harmonique est prise en compte explicitement dans l'optimisation multiobjective, on peut s'attendre a priori à de meilleurs résultats. C'est bien ce que l'on observe : à haute fréquence, le gain diminue de 4 dB, soit 40 %. Notons que les oscillations d'assez grande amplitude de la sortie et de la commande lors d'un saut de consigne ont une fréquence beaucoup plus faible pour le quatrième régulateur ; ils risquent donc moins d'endommager le mécanisme.

## 5.6 Comparaison avec d'autres méthodes

A part notre deuxième régulateur<sup>3</sup>, huit autres solutions ont été proposées dans le cadre du benchmark. Les résultats sont présentés et commentés dans [LCRB96]. On peut les classer grossièrement en quatre catégories selon le type d'incertitudes qu'elles prennent en compte pour représenter les trois modèles :

- ensemble de modèles ;
- incertitudes structurées qui englobent les trois modèles (par exemple par un ellipsoïde dans l'espace des coefficients des modèles) ;

<sup>3</sup>Notre premier régulateur a été écarté parce qu'il provoque trop d'oscillations à haute fréquence, et les régulateurs obtenus par optimisation multiobjective sont plus récents.

- incertitudes non structurées ;
- robustesse “naturelle” de régulateurs obtenus sans tenir compte explicitement des incertitudes (placement de pôles robuste, calibration de la fonction de sensibilité).

Seul notre régulateur remplit l'ensemble des spécifications. Nous ne voulons pas entrer dans les détails, parce que chacun constitue un compromis différent. Mais il est intéressant d'analyser les raisons qui ont conduit au succès de notre approche. A notre avis, on peut en invoquer trois.

- Les pôles en boucles fermées, qui constituent les paramètres de synthèse, ont un lien clair et direct avec la plupart des spécifications.
- Les incertitudes sont prises en compte telles quelles dans la synthèse, ce qui évite tout conservatisme.
- Grâce au degré élevé d'interactivité du logiciel de CAO, l'ingénieur se rend compte facilement des compromis qu'il peut obtenir.

## 5.7 Conclusions

Afin de montrer l'intérêt du placement de pôles multimodèle et de l'optimisation multiobjective, nous avons utilisé ces deux méthodes pour obtenir un régulateur qui remplisse le cahier des charges d'un système oscillant mal amorti et à paramètres variables. Les résultats sont très bons. Parmi les neuf régulateurs proposés par différents laboratoires français et l'Institut d'automatique, le nôtre, obtenu par placement de pôles multimodèle, est le seul à remplir l'ensemble des spécifications. Il y a pourtant encore une certaine marge d'amélioration, comme le montre l'optimisation multiobjective. L'avantage de cette méthode est de pouvoir facilement choisir un compromis entre différents objectifs. C'est ainsi que nous avons pu réduire l'effort sur la commande en limitant le module des fonctions de transfert entre la perturbation ou la consigne et le signal de commande.

Dans leur mise en oeuvre, les deux approches sont très différentes. Le placement de pôles multimodèle interactif permet de sentir rapidement ce qu'il est possible de faire, mais ne donne aucune garantie quant à l'optimalité de la solution. L'optimisation multiobjective est assez lourde en temps de calcul, mais aboutit sans aucune intervention humaine. Le résultat risque d'être inutilisable

si les critères retenus ne sont pas soigneusement choisis ; tous doivent être mentionnés explicitement. Elle nécessite une solution initiale relativement proche des spécifications à cause des optima locaux. L'expérience montre qu'un régulateur initial qui ne ferait que stabiliser les trois modèles du bras souple conduit typiquement à un indice de performances multiobjectif supérieur à 2. Il serait intéressant d'essayer d'améliorer les autres solutions proposées pour le benchmark ; comme aucune d'entre elles n'est basée sur ce genre d'optimisation, il reste certainement une marge de progression.

Le benchmark du bras souple, très proche des hypothèses des deux méthodes que nous proposons, est-il un cas particulier qui enlève toute valeur aux bons résultats obtenus ? Nous ne le pensons pas. Certes, le bras souple a influencé notre approche de la commande robuste. Mais il est représentatif de nombreux systèmes électro-mécaniques à grandes variations paramétriques lorsque le cahier des charges est très contraignant.

# Chapitre 6

## Conclusions générales

### 6.1 Contributions

Le travail de thèse s'articule autour de deux axes principaux. Le premier est l'intérêt de l'approche multimodèle pour décrire les incertitudes sur le modèle ou les variations en cours de fonctionnement. La dépendance de fonctions de transfert échantillonnées vis-à-vis des grandeurs physiques du système ne sont généralement pas linéaires ; cela oblige souvent à englober les variations dans des domaines conservateurs, ce qui donne finalement une dynamique du système bouclé plus lente qu'il n'est nécessaire. En choisissant un petit nombre de fonctions de transfert pour représenter les différentes conditions de fonctionnement, on reste très près de la dynamique que peut prendre le système réel. Bien entendu, cela n'empêche pas de tenir compte des incertitudes non structurées qui reflètent l'imperfection des modèles, notamment à haute fréquence.

Une approche originale a été développée pour permettre le placement de pôles multimodèle. L'avantage que représente l'utilisation des pôles en boucle fermée comme paramètres de synthèse est de spécifier directement la dynamique du système régulé tant pour le rejet des perturbations que pour l'asservissement. Son principal défaut, à savoir un manque de robustesse, est largement diminué lorsque l'on considère un ensemble de modèles qui reflètent les différentes conditions de fonctionnement et les incertitudes sur les paramètres.

Pour améliorer le niveau de performances d'un régulateur, une méthode d'optimisation multiobjective a été élaborée, elle aussi basée sur l'utilisation de

plusieurs modèles. Elle nécessite une liste explicite et exhaustive des spécifications, mais permet d'obtenir un compromis qui exploite au mieux les paramètres du régulateur.

Le second axe est la synthèse interactive. Dans toute méthode de conception, l'ingénieur a généralement à sa disposition des techniques de synthèse, qui lui permettent de déterminer la structure et les paramètres d'un dispositif, et des techniques d'analyse avec lesquelles il vérifie que le cahier des charges est satisfait même pour les spécifications qui n'étaient pas utilisées directement pour la synthèse. La commande automatique correspond à ce schéma. L'inconvénient de cette dichotomie est qu'il est parfois difficile de faire le lien entre les problèmes révélés par l'analyse et les paramètres de synthèse. L'approche proposée consiste à tirer parti de la puissance des ordinateurs modernes et de leurs capacités graphiques pour mettre à jour en temps réel les courbes qui décrivent le comportement du système régulé pendant que l'ingénieur manipule certaines grandeurs. On acquiert ainsi intuitivement une compréhension des mécanismes qui lient les grandeurs en jeu.

Pour justifier l'intérêt de ces approches, le placement de pôles multimodèle et l'optimisation multiobjective ont été utilisés pour l'asservissement de l'extrémité d'un bras souple. Les spécifications, nombreuses et serrées, devaient être remplies de façon robuste pour trois charges différentes. Les régulateurs obtenus montrent l'efficacité des méthodes proposées.

## **6.2 Extensions possibles**

Durant ce travail, nous nous sommes restreint à des systèmes monovariables. Le placement de pôles multimodèle interactif serait sans doute difficile à étendre au cas multivariable, d'une part parce que la spécification des valeurs propres ne fournit en général pas un régulateur unique, et d'autre part en raison de la difficulté à représenter toute l'information pertinente sous une forme facile à interpréter et à mettre en relation avec les valeurs propres. Par contre, il serait intéressant de voir dans quelle mesure notre approche multiobjective peut être étendue à des systèmes multivariables, notamment pour réduire les phénomènes de couplage. Une extension moins ambitieuse consisterait à tenir compte de perturbations mesurées.

Nous ne nous sommes pas étendu sur les moyens d'obtenir les modèles. La façon d'obtenir le nombre minimum de modèles qui permette la synthèse d'un régulateur robuste constitue un problème intéressant, que ce soit à partir d'une



identification basée sur les mesures ou d'un modèle de connaissances.

Une troisième direction de recherche consisterait à utiliser l'optimisation multiobjective dans un outil de CAO interactif. Peu de recherches ont été faites pour trouver un bon algorithme d'optimisation ; il doit être possible de le rendre beaucoup plus rapide et efficace. D'autre part, il est vraisemblable que la ré-écriture dans un langage compilé de l'évaluation des indices de performances et de leurs gradients, ainsi que de la routine d'optimisation, permette un gain de vitesse important. L'optimisation est de l'ordre de grandeur de quelques minutes sur des ordinateurs de milieu de gamme. On peut espérer descendre au-dessous de la seconde dans quelques années pour un système de la complexité du bras souple, et dès maintenant pour des systèmes plus simples. Un compromis entre toutes les spécifications serait alors très facile à obtenir.



# Notations

## Caractères latins

$A(q)$	dénominateur de la fonction de transfert du système à régler
$A'(q)$	produit $A(q)R_f(q)$
$A_m(q)$	dénominateur du modèle à poursuivre
$B(q)$	numérateur de la fonction de transfert du système à régler
$B'(q)$	produit $B(q)S_f(q)$
$B_m(q)$	numérateur du modèle à poursuivre
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$C(q, x)$	polynôme caractéristique (la dépendance en $x$ est souvent omise par souci de simplicité)
$C^D(q)$	polynôme caractéristique désiré
$e(t)$	signal d'erreur entre la consigne et la sortie
$h$	période d'échantillonnage
$H(q)$	fonction de transfert du système à régler
$H_c(q)$	fonction de transfert en boucle fermée entre la consigne et la sortie
$H_l(q)$	fonction de transfert de la boucle $B(q)S(q)/A(q)R(q)$
$H_m(q)$	fonction de transfert du modèle à poursuivre
$H_p(q)$	fonction de transfert en boucle fermée entre la perturbation et la sortie
$I$	matrice identité
$j$	indice représentant une spécification

$j$	$\sqrt{-1}$
$K(q)$	partie contre-réaction du régulateur $S(q)/R(q)$
$k$	indice représentant un modèle (souvent omis pour alléger les notations)
$M$	matrice de Sylvester
$n$	nombre de modèles
$N(q)$	symbole générique pour le numérateur de la fonction de transfert entre une entrée et un signal mesuré sur le système en boucle fermée
$O$	matrice nulle
$O((\cdot)^n)$	termes d'ordre $n$ et supérieur dans un développement en série
$p_i$	pôle de la fonction de transfert en boucle fermée
$p_i^D$	pôle désiré de la fonction de transfert en boucle fermée
$q$	opérateur d'avance d'une période d'échantillonnage
$r(t)$	consigne (signal de référence)
$R(q)$	dénominateur du régulateur RST, monique
$R'(q)$	partie libre de $R(q)$ , monique
$R_f(q)$	partie fixe de $R(q)$ , monique
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
RST	nom générique d'un régulateur polynomial à deux degrés de liberté
$s$	variable de la transformée de Laplace
$s(t)$	saut indiciel
$S(q)$	numérateur de la contre-réaction du régulateur RST
$S'(q)$	partie libre de $S(q)$
$S_f(q)$	partie fixe de $S(q)$ , monique
$\hat{S}(q)$	sensibilité de la réponse en boucle fermée par rapport à la fonction de transfert du système
$\hat{S}_{up}(q)$	réponse harmonique de la commande par rapport à une perturbation en sortie, ou sensibilité perturbation-entrée (nommée ainsi par analogie avec la sensibilité $\hat{S}$ )
$t$	temps

$T(q)$	numérateur du filtre de consigne du régulateur RST
$T'(q)$	partie libre de $T(q)$
$T_f(q)$	partie fixe de $T(q)$ , à gain statique unité
$\hat{T}(q)$	sensibilité complémentaire ( $1 - \hat{S}$ )
$u(t)$	entrée du système (signal de commande)
$w_i$	poids sur le déplacement désiré d'un pôle en boucle fermée selon la direction $\varphi$
$w_i^\perp$	poids sur le déplacement désiré d'un pôle en boucle fermée selon la direction $\varphi_i + \pi/2$
$x$	paramètres de la partie libre de la contre-réaction du régulateur RST
$x'$	paramètres de la partie libre de la contre-réaction et du préfiltre du régulateur RST
$y(t)$	sortie du système à régler
$y_{\text{ref}}(t)$	réponse indicielle de référence
$z$	variable de la transformée en $z$
$z_i$	zéro de la fonction de transfert en boucle fermée
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers

### Caractères grecs

$\alpha$	mesure de performance à optimiser
$\beta$	borne sur une mesure de performance
$\bar{\beta}$	valeur cible pour une mesure de performance
$\delta$	indique une différence par rapport à une valeur nominale (pour une grandeur perturbée) ou de départ (pour une itération)
$\Delta p_i^d$	déplacement désiré d'un pôle en boucle fermée
$\varepsilon$	différence entre le pôle désiré et le pôle obtenu effectivement en boucle fermée
$\hat{\varepsilon}$	approximation de $\varepsilon$ linéarisé par rapport aux paramètres du régulateur $x$
$\varphi_i$	direction du poids principal sur le déplacement d'un pôle en boucle fermée

$\chi$	indice de performances multiobjectif
$\chi_i$	indice de performance associé à l'objectif critique $\Omega_i$
$\chi_{\text{opt}}$	indice de performances multiobjectif optimal
$\chi_{\text{P-opt}}$	indice de performances multiobjectif Pareto-optimal
$\omega$	pulsation
$\omega_e$	pulsation d'échantillonnage
$\omega_N$	pulsation de Nyquist
$\Omega$	triplet $\{j, k, \omega\}$ ou $\{j, k, t\}$ suivant la spécification
$\Omega_i$	objectif critique

### Fonctions et opérateurs

$ z $	valeur absolue de $z$
$\bar{z}$	valeur conjuguée du nombre complexe $z$
$\text{sign}x$	-1 si $x < 0$ , 0 si $x = 0$ ou 1 si $x > 0$
$M^T$	transposée de la matrice réelle $M$ , ou transposée conjuguée de la matrice complexe $M$

*Remarque* : à moins que cela ne soit mentionné explicitement, la période d'échantillonnage est normalisée à  $h = 1$  ; par conséquent,  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\omega_N = \omega_e/2 = \pi$ .

# Bibliographie

- [ABK<sup>+</sup>94] J. Ackermann, A. Barlett, D. Kaesbauer, W. Sienel et R. Steinhauser. *Robust Control: Systems With Uncertain Physical Parameters*. Communication and control engineering series. Springer, 1994.
- [ADPD95] C. Abdallah, P. Dorato, F. Pérez et D. Docampo. Controller synthesis for a class of interval plants. *Automatica*, 31(2):341–343, février 1995.
- [ÅW90] K. J. Åström et B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ., 1990.
- [BA94] H. Bourlès et F. Aïoun. Approche  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse. Dans A. Oustaloup, éditeur, *La robustesse, analyse et synthèse de commandes robustes*, pp. 162–235. Hermès, Paris, 1994.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing, New York, 1994.
- [CS88] R. Y. Chiang et M. G. Safonov. *MATLAB Robust-Control Toolbox: User's Guide*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1988.
- [DFM92] P. Dorato, L. Fortuna et G. Muscato. *Robust Control for Unstructured Perturbations — An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [DFT92] J. C. Doyle, B. A. Francis et A. R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing, New York, 1992.
- [dL93] Ph. de Larminat. *Automatique — Commande des systèmes linéaires*. Hermès, Paris, 1993.

- [Dor91] P. Dorato. A survey of robust multiobjective design techniques. Dans S. P. Bhattacharyya et L. H. Keel, éditeurs, *Control of Uncertain Dynamic Systems*, pp. 249–259. CRC Press, London, 1991.
- [EK91] M. El-Khoury. *Influence des zéros d'une fonction de transfert sur le comportement dynamique d'un système linéaire et application au réglage polynomial*. Thèse de doctorat, Institut d'automatique, EPFL, Lausanne, 1991.
- [GBBL86] D. Gangsaas, K. R. Bruce, J. D. Blight et U.-L. Ly. Application of modern synthesis to aircraft control : Three case studies. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31 :995–1014, 1986.
- [Gra92] A. Grace. *Optimization Toolbox For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1992.
- [HMPL95] U. Holmberg, P. Myszkowski, Y. Pigué et R. Longchamp. On compensation of nonminimum-phase zeros. *Automatica*, 31(10):1433–1441, septembre 1995.
- [Hor91a] I. Horowitz. A historical survey of feedback control theory in USA. Dans S. P. Bhattacharyya et L. H. Keel, éditeurs, *Control of Uncertain Dynamic Systems*, pp. 205–213. CRC Press, London, 1991.
- [Hor91b] I. Horowitz. Survey of quantitative feedback theory. *Int. J. Control*, 53(2):255–291, 1991.
- [HPB95] U. Holmberg, Y. Pigué et D. Bonvin. Robust control synthesis for plants with parametric uncertainties. Dans *Proc. of 1995 European Control Conf.*, volume 4, pp. 3025–3030, Rome, 1995.
- [KB97] L. H. Keel et S. P. Bhattacharyya. Robust, fragile, or optimal ? *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(8):1098–1105, 1997.
- [LCR93] I. D. Landau, C. Cyrot et D. Rey. Robust control design using the combined pole placement/sensitivity function shaping method. Dans *Proc. of 1993 European Control Conf.*, pp. 1693–1698, Groningen, 1993.



- [LCRB96] I. D. Landau, C. Cyrot, D. Rey et J. Barnier. Régulation numérique robuste d'un bras manipulateur souple, banc d'essais comparatif de différentes méthodes de synthèse. Dans J. Bernussou, éditeur, *Commande robuste, développements et applications*, pp. 104–131. Hermès, Paris, 1996.
- [Lju87] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [Lon95] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1995.
- [LvdW94] P. Löhnberg et E. H. van de Waal. Self-tuning optimal robust integrating pole placement control. Dans *Proc. of 10th IFAC Symp. on System Identification*, pp. 297–302, Copenhagen, 1994.
- [Mat97] The MathWorks, Inc., Natick, Mass. *MATLAB, the Language of Technical Computing — Using MATLAB*, 1997.
- [May73] D. Q. Mayne. The design of linear multivariable systems. *Automatica*, 9(2) :201–208, mars 1973.
- [MG90] R. H. Middleton et G. C. Goodwin. *Digital Control and Estimation : A Unified Approach*. Prentice-Hall International Editions, London, 1990.
- [MH93] J. E. Marsden et M. J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, 2e édition, 1993.
- [Miy90] Y. Miyazawa. Robust flight control system design with multiple model approach. Dans *Proc. of 1990 AIAA Guid., Nav. and Control Conf.*, pp. 874–882, Portland, OR., 1990.
- [Mun87] N. Munro. Computer-aided design I : the inverse Nyquist array design method. Dans J. O'Reilly, éditeur, *Multivariable control for industrial applications*, pp. 211–228. Peter Peregrinus Ltd., London, 1987.
- [Oga96] K. Ogata. State space — pole placement. Dans W. S. Levine, éditeur, *The Control Handbook*, pp. 209–215. CRC Press, 1996.

- [OLM95] A. Oustaloup, P. Lanusse et B. Mathieu. Robust control of SISO plants : the CRONE control. Dans *Proc. of 1995 European Control Conf.*, volume 2, pp. 1423–1429, Rome, 1995.
- [OR94] B. A. Ogunnaïke et W. H. Ray. *Process Dynamics, Modeling, and Control*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [Owe87] D. H. Owens. Multivariable control system design techniques. Dans J. O'Reilly, éditeur, *Multivariable control for industrial applications*, pp. 186–210. Peter Peregrinus Ltd., London, 1987.
- [PD77] B. Pchénitchiny et Y. Daniline. *Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémum*. Mir, Moscou, 1977.
- [Per94] G. J. Peretti. *Ein Beitrag zur Analyse, Synthese und Implementierung robuster Regelkreise*. Thèse de doctorat, ETHZ, Zurich, 1994.
- [PHL97a] Y. Piguët, U. Holmberg et R. Longchamp. Multi-model weighted pole placement. A paraître dans *European Journal of Control*, 1997.
- [PHL97b] Y. Piguët, U. Holmberg et R. Longchamp. Multiobjective controller design using multiple models. Dans *Proc. of 2nd IFAC Symp. on Robust Control Design*, pp. 253–258, Budapest, 1997.
- [PKG92] G. Peretti, F. Kraus et L. Guzella. Robust compensator synthesis — an experimental application. Dans M. Mansour, S. Balemi et W. Truöl, éditeurs, *Robustness of Dynamic Systems with Parametric Uncertainties*, pp. 281–290. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [PT94] J. A. Pensar et H. T. Toivonen. A multimodel mixed  $H_2/H_\infty$  problem for plants with structured uncertainty. Dans *IFAC Symp. ADCHEM '94*, pp. 289–294, Kyoto, 1994.
- [PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, New York, 2e édition, 1992.
- [RB91] H. F. Raynaud et S. Besset.  $H_\infty$ -ellipsoidal controller — an approach to robustness with respect to parameter uncertainties. Dans *Proc. of 1991 European Control Conf.*, volume 3, pp. 2601–2604, Grenoble, 1991.

- [RJ96] C. M. Rimvall et C. P. Jobling. Computer-aided control systems design. Dans W. S. Levine, éditeur, *The Control Handbook*, pp. 429–442. CRC Press, 1996.
- [RM78] H. H. Rosenbrock et N. Munro. The inverse Nyquist array method. Dans M. K. Sain, J. L. Peczkowski et J. L. Melsa, éditeurs, *Alternatives for Linear Multivariable Control*, pp. 101–137. National Engineering Consortium, Inc., Chicago, 1978.
- [SAB97] W. Sienel, J. Ackermann et T. Bünte. Design and analysis of robust control systems in PARADISE. Dans *Proc. of 2nd IFAC Symp. on Robust Control Design*, pp. 71–76, Budapest, 1997.
- [SBG97] M. M. Seron, J. H. Braslavsky et G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Communication and control engineering series. Springer, 1997.
- [Soe92] R. Soeterboek. *Predictive Control, a Unified Approach*. Prentice Hall, New York, 1992.
- [SSH96] M. S. Santiana, A. R. Stubberud et G. H. Hostetter. Discrete-time equivalents to continuous-time systems. Dans W. S. Levine, éditeur, *The Control Handbook*, pp. 265–279. CRC Press, 1996.
- [STsW91] P. M. Sandelin, H. T. Toivonen, M. Österås et K. V. Waller. Robust multiobjective linear quadratic control of distillation using low-order controllers. *Chem. Eng. Sci.*, 46:2815–2827, 1991.
- [TT90] H. T. Toivonen et J. Tamminen. Minimax robust LQ control of a thermomechanical pulping plant. *Automatica*, 26:347–351, 1990.
- [Tun92] C. Tuncelli. *Algorithmes unifiés de commande polynomiale auto-ajustable par placement des pôles*. Thèse de doctorat, Institut d'automatique, EPFL, Lausanne, 1992.
- [XM95] J. Z. Xia et C.-H. Menq. Precision tracking control of non-minimum phase systems with zero phase error. *Int. J. Control*, 61(4):791–807, 1995.
- [YCB97] O. Yaniv, Y. Chait et C. Borghesani. The QFT control design toolbox for MATLAB. Dans *Proc. of 2nd IFAC Symp. on Robust Control Design*, pp. 107–112, Budapest, 1997.

- [YJB76] D. C. Youla, H. A. Jabr et J. J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—part II: The multivariable case. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21 :319–338, 1976.
- [YL96] J.-S. Yang et W. S. Levine. Specification of control systems. Dans W. S. Levine, éditeur, *The Control Handbook*, pp. 158–169. CRC Press, 1996.
- [Zad63] L. A. Zadeh. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE Trans. Autom. Control*, 8(4) :59–60, 1963.

# Index

## A

abaque, 57  
algorithme de synthèse  
  const, 88  
  optim. multiobjective, 101  
  pl. de pôles multimodèle, 31–32  
  préfiltre, 47, 76  
amortissement, 17, 44, 54, 56, 62, 71, 74, 76, 78  
anticipation, 16  
asservissement, 3, 5, 10, 11, 39, 44, 56, 67, 76, 92, 99  
  (effet de la c.-réaction), 42  
  (performances), 15, 71  
attraction des pôles désirés, 29  
automatique  
  classique, 5  
  moderne, 6

## B

bande passante, 42, 43, 57  
benchmark, 65–98  
Black (diagramme de), 8, 57  
Bode (diagramme de), 57  
borne, 6, 16, 34–40, 45, 78, 87, 89  
bras souple, 19, **65–98**  
bruit de mesure, 42, 43, 57

## C

calibration de la sensib., 97  
caméra, 67  
cascade (régulateurs en), 4

causalité, 11, 13, 14, 22, 53, 72  
cible (valeur), 34  
commande  
  prédictive, 47  
commande adaptative, 6  
comparaison, 92, 96  
comportement vicieux, 16, 67  
conception assistée par ordinateur, 8, **49–63**  
conjugués (pôles complexes), 17, 27, 54  
conservatisme, 6, 97, 99  
consigne, 3  
continuité, 30, 55  
  des incertitudes, 60  
contradictaires (objectifs), 3, 39  
contributions, **99–100**  
convergence, 45, 88  
couplage, 100  
critique  
  (objectif), **38**  
  (point), 16, 71  
  (pôles), **31**  
  (pulsation), 57, 62  
croisement (pulsation de), 57, 62  
CRONE, 6

## D

découplage, 4  
 $\delta$  (transformée en), 5  
dépassement, 16, 33, 36, 45–47, 56, 62, 71, 76

négatif, 16, 47, 62, 77  
 déplacement des pôles  
     (compromis), 74  
     (contraintes), 54  
     (effet du), 25, 29, 61  
     désiré, 23, 24, 26  
     linéarisé, 24, 61

dérivateur

    (factor), 53  
     (terme), 58

descente de gradient, 7, 38, 48

désensibilisation, 11

diophantine (équation), 12, 14

discrétisation, 4

dominant (pôle), 2, 48, 61, 74

## E

enveloppe, 77

erreur

    de la sortie, 3, 10, 34, 41, 48, 57,  
     62, 71, 76  
     paramétrique, 3  
     permanente, 15  
     sur les pôles, 25, 29, 31

exclusion (principe d'), 6

expérimentaux (résultats), 78, 87

## F

factorisation, 10, 17

filtrage de la consigne, *voir* préfiltre

fixe (partie), 10, 20, 32, 50, 53, 78

fonction de transfert, 5

fonction implicite, 26

frottement sec, 78

fréquence naturelle, 17

## G

gradient

    de la sensibilité, 43  
     de la val. abs., 42  
     des pôles, 26  
     des rép. temp., 44

du régulateur, 41

## H

$H_\infty$

    (norme), 6, 8, 37  
     (synthèse), 6

## I

identification, 6, 9, 67, 78, 101

implantation, 4

incertitude

    additive, 17

    ellipsoïdale, 6, 21, 60, 96

    multiplicative, 17

incertitudes

    non structurées, 6, 33, 97, 99

    paramétriques, 6, 21, 33, 65

    structurées, 96

initial (régulateur), 31, 59, 72, 88, 98

insensibilisation, 42

intégrateur, 10, 32, 40, 69

intermédiaires (systèmes), 7

interne (dynamique), 12

invariant (système), 4

## L

lieu des pôles, 54, 58

linéaire (système), 4

linéarisé (système), 3, 9

## M

marge

    de gain, 3, 16, 19, 57, 62

    de module, 16, 43, 57, 62, 71

    de phase, 3, 16, 19, 57, 62

    de retard, 16, 62, 71

matrice de Sylvester, 14, 27

minimax, 34

modélisation, 3, 9, 21, 50, 67

    défauts de, 42, 57, 78

moindres carrés, 7, 24, 34

    pondérés, 25

monovariante, *voir* SISO

multimodèle

(optimisation), *voir* optimisation multiobjective

(placement de pôles), *voir* placement de pôles multimodèle

multiobjective (optimisation), *voir* optimisation multiobjective

multivariable, 4, 100

## N

nominal (modèle), 9, 16, 19, 32, 60, 72

non-minimum de phase, 47, 62, 67

normalisation, 24

numériques (problèmes), 5, 29

numérisation, 4

Nyquist

(diagramme de), 57

(fréquence de), 4, 71, 92

## O

opérateur

d'avance, 5

de retards, 5

optimisation

du préfiltre, *voir* préfiltre

$H_\infty$ , 7

multiobjective, 6, **33–48**, 87–96, 99

## P

paramétrisation, **11**, **40–42**

Pareto-optimum, 7, 39, 48

perturbation, **9**

PID, 27, 29, 53

placement de pôles

multimodèle, 7, **19–32**, 33, 49, 59–61, 74–76, 99

exact, 21

partiel, 22

standard, 12–15, 19, 50

pôles

(placement de), *voir* placement de pôles

approximés, 29

désirés, 7, 23, 25, 28, 29, 31, 59

effectifs, 23, 25, 59

polynôme observateur, 12

pondération, 7

des pôles, 23–28, 31

poursuite, *voir* asservissement

préfiltre, 15, 53, 54

(optimisation du), **46–48**, 76–77

pulsation naturelle, *voir* fréquence naturelle

## Q

QFT, 5

quantification, 4

## R

rayon de robustesse, 6

réel (signal), 4

rejet de perturbations, 10, 11, 17, 21, 33, 43, 49, 55, 71, 74, 82, 99

réponse impulsionnelle finie, 47

retard pur du régulateur, 13, 72

## S

saturation, 42, 44, 48, 56, 67

sensibilité, **16–17**

SISO, 4

stabilisation simultanée, 6

statique (gain), 11, 15, 35, 40, 67, 76

statisme, 10, 15, 57, 69

SysQuake, 31, 32, **49–63**

## T

temps

d'établissement, 45, 47

de montée, 45, 47

transitoire, 16, 33, 42, 55, 58, 76





# Curriculum vitae

Nom Yves PIGUET  
Né le 4 octobre 1967  
Origine Le Chenit, canton de Vaud

## Certificats et diplômes

1983 Certificat d'études secondaires, section latin-grec  
1986 Maturité fédérale mathématiques-sciences (type C)  
1991 Diplôme EPFL d'ingénieur en microtechnique

## Expérience professionnelle

1987-1991 Informatisation du Musée suisse de l'appareil photographique à Vevey, comprenant le choix du matériel, la mise sur bases de données des fichiers des collections, la formation du personnel et le développement de plusieurs programmes pédagogiques à l'intention des visiteurs.

1991-1992 Stage à l'Intelligent Research Center de Toshiba à Yokohama (Japon). Outre la découverte d'une culture différente, ce stage a permis le développement d'algorithmes pour la mesure de la position et de l'orientation d'un objet en se basant sur une image vidéo ; la programmation de ces algorithmes en C et en assembleur TMS320C25 sous OS-9 ; leur optimisation pour le traitement en parallèle et leur programmation en Parallel-C et en assembleur sur cinq Transputers ; et la programmation de drivers pour le système d'exploitation temps-réel VxWorks.

- 1992-1993      Assistant à l'Institut de microtechnique de l'EPFL sur le projet Minerva (robot neuro-chirurgical pour les opérations stéréotaxiques). Développement de la commande du robot sur PC, reprise de la partie imagerie, commande haut-niveau et interface utilisateur sur Sun, et communication entre scanner (DEC VAX), Sun et PC. Encadrement d'un travail de diplôme.
- 1993-1997      Assistant-doctorant à l'Institut d'automatique de l'EPFL. Recherche dans les domaines du réglage robuste, de l'effet des zéros sur l'asservissement, de l'identification par relais. Développement de logiciels de CAO et de commande temps-réel. Encadrement d'exercices, de travaux pratiques, de projets de semestre et de diplôme.
- 1997            Chargé de cours au semestre d'hiver 1997-98 pour le cours *Modélisation et Simulation I* donné en option aux étudiants de microtechnique, d'électricité, de génie mécanique et d'informatique de 7e semestre.